

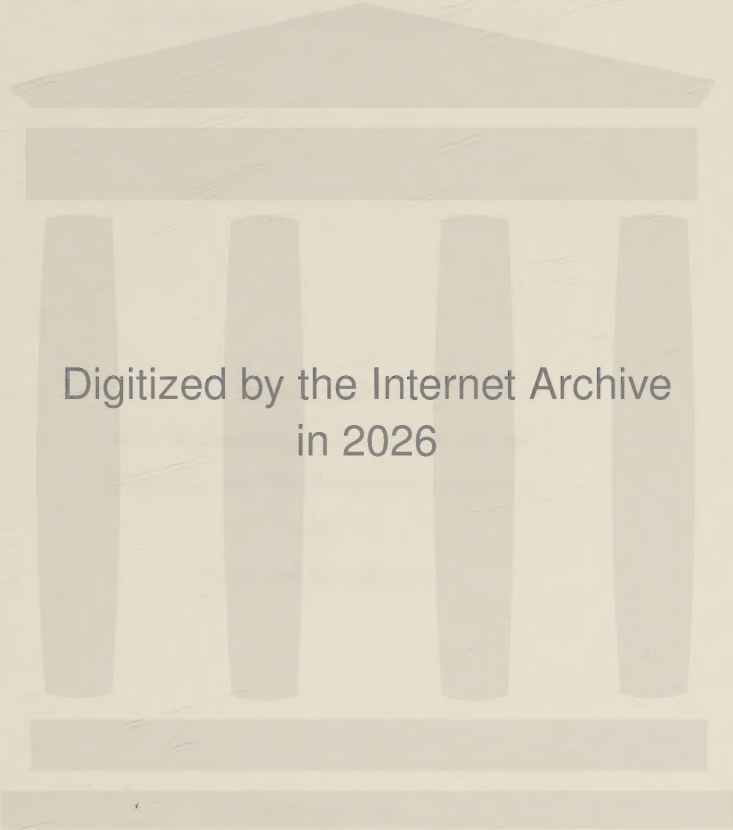
GLOBALES LÖSUNGSVERHALTEN
ZEITVERZÖGERTER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
AM BEISPIEL VON MODELLFUNKTIONEN

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Universität Bremen

vorgelegt von
Hubert Peters
aus
Swisttal-Straßfeld

Bremen 1980

1981



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543123_0011

GLOBALES LÖSUNGSVERHALTEN
ZEITVERZÜGERTER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
AM BEISPIEL VON MODELLFUNKTIONEN

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Universität Bremen

vorgelegt von
Hubert Peters
aus
Swisttal-Straßfeld

Bremen 1980



Die Dissertation lag dem Promotionsausschuß Dr.-Ing./Dr.rer.nat. der Universität Bremen vor. An dem Promotionsverfahren haben Prof. Dr. Heinz-Otto Peitgen und Prof. Dr. Karl Peter Hadeler als Gutachter mitgewirkt. Das Kolloquium fand am 16. Februar 1981 statt.

INHALT
=====

EINLEITUNG	1
KAPITEL I : NICHTLINEARITÄTEN MIT EINER NULLSTELLE	6
§ 1 Bezeichnungen und Begriffe	7
§ 2 Chaotisches Verhalten eindimensionaler Differenzengleichungen	13
§ 3 Treppenfunktionen als Modell-Nichtlinearitäten	21
§ 4 Sekundärverzweigung bei einer Modell-Gleichung	30
§ 5 Chaotisches Verhalten einer Modell-Gleichung	48
§ 6 Mehrparameter-Probleme	70
KAPITEL II : NICHTLINEARITÄTEN MIT MEHREREN NULLSTELLEN	97
§ 7 Spezielle periodische Lösungen	99
§ 8 Periodische Lösungen zweiter Art	108
§ 9 Komplexe Dynamik	125
§ 10 Schlußbemerkungen	142
LITERATUR	145

EINLEITUNG

=====

Seit mehr als zwanzig Jahren, intensiv seit etwa zehn Jahren, wird die nichtlineare zeitverzögerte Differentialgleichung

$$(0.1) \quad x'(t) = -\alpha \cdot f(x(t-1))$$

als nichttriviales Testbeispiel für Methoden der nichtlinearen Funktionalanalysis studiert. Das einfache Aussehen dieser Gleichung darf nicht über die Schwierigkeiten hinwegtäuschen, die einem schon bei einfachen Fragestellungen wie Existenz und Eindeutigkeit von (periodischen) Lösungen in den Weg treten. Richtungsweisende Arbeiten zum Existenzproblem gehen u.a. auf JONES, NUSSBAUM sowie KAPLAN und YORKE zurück (/16/, /19/, /25/)

Während bei JONES und NUSSBAUM die Gleichung (0.1) zum Anwendungsbeispiel für Methoden der asymptotischen Fixpunkttheorie, insbesondere des BROWDERschen Fixpunktsatzes wurde, stellt die auf KAPLAN und YORKE zurückgehende Phasenebenen-Methode für den Spezialfall ungerader Nichtlinearitäten f eine Beziehung her zwischen speziellen periodischen Lösungen der Gleichung (0.1) und periodischen Lösungen der Periode 4 des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(0.2) \quad \begin{aligned} x'(t) &= -\alpha \cdot f(y(t)) \\ y'(t) &= \alpha \cdot f(x(t)) \end{aligned} \quad (y(t)=x(t-1))$$

Auf Kosten größerer Allgemeinheit erlaubt diese Sehweise eine tiefere Einsicht in Periodenverhalten und Parametrisierbarkeit eines (durch Symmetrie der Lösungen charakterisierten) speziellen Lösungskontinuums der Gleichung (0.1) (vgl. /3/).

Neben der - unter anderem durch die Populationsbiologie motivierten - WRIGHTschen Gleichung

$$(0.3) \quad x'(t) = -\alpha \cdot (e^{x(t-1)} - 1)$$

ist vor allem die Gleichung

$$(0.4) \quad x'(t) = - \alpha \cdot \tanh(x(t-1))$$

häufig untersucht worden. Sowohl mit den Methoden der asymptotischen Fixpunkttheorie als auch mit der Phasenebenen-Methode folgt, daß Gleichung (0.4) für alle $\alpha > \frac{\pi}{2}$ eine periodische Lösung der Periode 4 hat (/19/, /25/).

Numerische Rechnungen ergeben, daß jede von 0 verschiedene monoton wachsende Anfangsfunktion aus dem Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ sich gegen diese periodische Lösung einschwingt. Für größer werdendes α approximiert diese periodische Lösung die "Sägezahnfunktion"

$$x_{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha t & ; \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \alpha(2-t) & ; \quad 1 \leq t \leq 3 \\ \alpha(t-4) & ; \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

(periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt).

Dieses Verhalten generiert man unmittelbar, wenn man statt der Gleichung (0.4) die Modell-Gleichung

$$(0.5) \quad x'(t) = - \alpha \bar{f}(x(t-1))$$

mit $\bar{f}(x) = \text{sign}(x)$ betrachtet: für diese Modell-Gleichung stellt sich sofort nach Vorgabe einer monoton wachsenden Anfangsfunktion die "Sägezahnlösung" ein. Insbesondere erlaubt die Wahl der Modellfunktion $\bar{f}$ die explizite Berechnung der periodischen Lösung. Ähnliche Modellierungen anderer Gleichungstypen mit dem Ziel, Lösungen geschlossen darzustellen, findet man etwa auch bei COLEMAN-RENNINGER / 8 /.

Wie kann man sich umgekehrt elementare Beobachtungen bei Modell-Gleichungen zunutze machen, um zu Aussagen für die eigentlich interessierenden Gleichungen mit stetigen Nichtlinearitäten zu gelangen?

Zwei Möglichkeiten sind denkbar:

- (1) Approximation der stetigen Nichtlinearität f durch Modellfunktionen $\bar{f}_k$ (etwa Treppenfunktionen)
- (2) Approximation der Modellfunktion $\bar{f}$ durch stetige Funktionen f_ϵ

Während bei (1) die ursprüngliche Eleganz der Modellfunktions-Idee verlorengeht (keine explizite Beschreibung der Lösung möglich), sind bei (2) die approximierenden stetigen Funktionen f_ϵ im Hinblick auf Anwendungen ebenso "natürlich" oder "künstlich" wie die gewählte Modellfunktion $\bar{f}$. Trotzdem ist der Gesichtspunkt (1) wichtig vom Standpunkt der Numerik ("Diskretisierung" der Nichtlinearität anstelle einer Diskretisierung der Lösung) und (2) bei der Frage nach der strukturellen Stabilität von Phänomenen, die im Rahmen von Modellfunktionen entdeckt werden, daß heißt bei der Frage, wie pathologisch oder natürlich Erscheinungen bei der Modell-Gleichung für "reale" Gleichungen mit stetigen Nichtlinearitäten sind.

Trotz der Wichtigkeit dieser Fragen werden wir uns in dieser Arbeit auf das Studium von Modell-Gleichungen beschränken. Zu globalen Fragestellungen wie

- Sekundärverzweigung, Kaskadenverzweigung
- Strukturwandel, Strukturverlust
- chaotisches Lösungsverhalten

wurde im Rahmen bisheriger Ansätze noch kein Beitrag geleistet. Modell-Gleichungen erscheinen hinsichtlich derartiger Fragen geeignet, ein tieferes Verständnis der Dynamik, eine explizite Berechnung quantitativer Größen wie Fixpunktindex und Periode sowie eine Hilfestellung für eine "globale" Numerik (Startproblem für Homotopieverfahren) zu ermöglichen.

Im Zentrum dieser Arbeit stehen zwei Problemkreise:

(I) Chaotisches Lösungsverhalten für die Gleichung

$$\underline{x'(t) = -\alpha \frac{x(t-1)}{1+x(t-1)^8}}$$

NUSSBAUM und YORKE /28/ vermuteten, daß eine zeitverzögerte Differentialgleichung mit einer "Buckel"-Nichtlinearität neben unendlich vielen periodischen Lösungen auch "turbulente" Lösungen besitzt, das sind oszillierende Lösungen, die asymptotisch nicht periodisch werden.

(II) Komplexe Dynamik für die Gleichung $x'(t) = -\alpha \sin x(t-1)$

FURUMOCHI /10/ wies für eine Gleichung dieses Typs "periodische Lösungen zweiter Art" nach, das heißt Lösungen x mit $x(t + \text{Periode}) = x(t) + C$ (C konstant). Die Nichtlinearität $f = \sin$ hat mehr als eine Nullstelle und erfüllt damit nicht mehr die Standardvoraussetzung $x.f(x) > 0$ für $x \neq 0$.

Die wichtigsten Resultate sind:

eine Bestätigung der Vermutung von NUSSBAUM und YORKE für eine Modell-Gleichung, in der die "Buckel"-Nichtlinearität durch eine geeignete Treppenfunktion ersetzt wird (Satz 5.4) ;

der Nachweis eines parameterabhängigen Übergangs von periodischen Lösungen zu periodischen Lösungen zweiter Art für eine Gleichung, in der $f = \sin$ durch $\bar{f} = \text{sign}(\sin)$ modelliert wird (Satz 8.3) ;

komplexes Lösungsverhalten bei Modell-Nichtlinearitäten mit mehreren Nullstellen, bedingt durch die "Buckel" der Nichtlinearität und Interferenz zwischen langsam und schnell schwingenden Lösungen (Satz 9.8) .

Bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei Herrn Prof. Dr. Heinz-Otto Peitgen. Er hat mich zuerst mit der NUSSBAUM-YORKEschen Vermutung bekannt gemacht und diese Arbeit mit kritischem Interesse begleitet und gefördert. Seiner Initiative verdanke ich die Möglichkeit zu zahlreichen Diskussionen mit anderen an diesen Problemen Interessierten. Besonders erwähnt seien darunter Prof. Dr. Hans-Otto Walther (München), der mir während seiner beiden Gastaufenthalte am Sonderforschungsbereich 72 in Bonn ein steter Gesprächspartner war, sowie Prof. J. Keener (Salt Lake City) und Prof. S.N. Chow (East Lansing), die mich während eines Gastaufenthaltes in den USA ermunterten, auf dem beschrittenen Weg fortzufahren.

Meinen Kollegen Hans-Willi Sieberg und Norbert Angelstorf danke ich für zahlreiche Diskussionsbeiträge.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft gilt mein Dank für die Förderung dieser Arbeit im Sonderforschungsbereich 72 an der Universität Bonn und im Forschungsprojekt "Multiple Bifurkation" an der Universität Bremen.

KAPITEL I

=====

NICHTLINEARITÄTEN MIT EINER NULLSTELLE

=====

In einem Brief an H.-O. Peitgen aus dem Jahr 1977 vermutete R.D. NUSSBAUM für die Gleichung

$$x'(t) = -\alpha \frac{x(t-1)}{1 + x(t-1)^8}$$

"chaotisches" Verhalten, das heißt grob gesagt: das Auftreten unendlich vieler periodischer und aperiodischer Lösungen. Die Diskussion dieser Vermutung und damit zusammenhängender Fragen ist der Gegenstand dieses Kapitels.

In § 1 führen wir einige grundlegende Begriffe zur Behandlung des Periodizitätsproblems bei Delay-Gleichungen ein (Verschiebeoperatoren). In § 2 referieren wir bekannte Resultate über chaotisches Verhalten bei eindimensionalen Differenzengleichungen. Ab § 3 wählen wir Treppenfunktionen als Modell-Nichtlinearitäten und ziehen einfache Folgerungen aus diesem Ansatz (Reduktion auf endlichdimensionales Fixpunktproblem, Modellierung globaler Verzweigungsphänomene). Die Wahl einer festen, die "Bukkel"-Nichtlinearität $g(x) = x \cdot (1 + x^8)^{-1}$ modellierenden Treppenfunktion f erlaubt in § 4 zunächst die Angabe einer invarianten (bezüglich eines Verschiebeoperators) Menge, die 0 nicht enthält und homöomorph zum Standard-2-Simplex Δ^2 ist. Der auf dem Simplex induzierte Verschiebeoperator wird explizit berechnet, was zunächst die Frage nach Sekundärverzweigung für die Modellgleichung positiv beantwortet. In § 5 erweist sich der induzierte Verschiebeoperator schließlich sogar als eindimensionale Intervallabbildung, die sich für geeignete Parameter $\alpha > \alpha^*$ als "chaotisch" im Sinne von LI und YORKE /20/ erweist. In § 6 untersuchen wir, inwieweit Sekundärverzweigung und chaotisches Verhalten eine Pathologie der speziell gewählten (von einem Parameter abhängenden) Modell-Gleichung sind. Anstelle des Einparameter-Pro-

blems studieren wir ein Zweiparameter-Problem und grenzen Parameterbereiche ein, für die Sekundärverzweigung bzw. chaotisches Verhalten eintritt.

§ 1 Bezeichnungen und Begriffe

Es sei $C[0,1]$ der Banachraum der stetigen Funktionen $x : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm $\|x\| := \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$.

Wir studieren in dieser Arbeit das Anfangswertproblem

$$(1.1) \quad \begin{cases} x'(t) = -f(x(t-1)) & ; \quad 1 \leq t < \infty \\ x(t) = \phi(t) & ; \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Hierbei sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die zusätzlich die folgende Bedingung erfülle:

$$(1.2) \quad xf(x) > 0 \quad \text{für alle } x \neq 0$$

Sei P der folgendermaßen definierte Kegel:

$$P := \{ \phi \in C[0,1] \mid \phi(0) = 0 ; \quad \phi \text{ monoton wachsend} \}$$

Unter einer weiteren Voraussetzung an f , nämlich

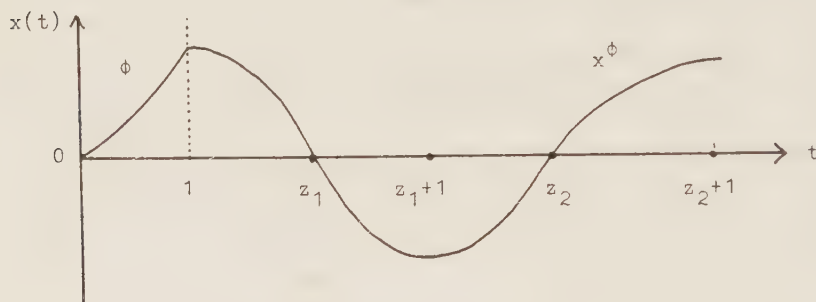
$$(1.3) \quad \begin{array}{l} \text{Es existiere ein } c > 1 \text{ und ein } \epsilon > 0, \text{ so daß} \\ \text{für alle } x \text{ mit } |x| < \epsilon \text{ gilt: } |f(x)| > c|x| \end{array}$$

hat die vermöge Integration eindeutig bestimmte Lösung x^ϕ der Gleichung (1.1) zum Anfangswert ϕ unendlich viele Nullstellen $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Nullstellen erfüllen die Beziehung $z_{n+1} > z_n + 1$.

Eine Lösung, deren Nullstellen durch einen Mindestabstand der Länge 1 voneinander getrennt sind, heißt langsam schwingend.

Lösungen, die nicht langsam schwingend sind, heißen schnell schwingend.

Die Voraussetzung (1.2) gewährleistet, daß die Lösung x^ϕ für ein $\phi \in P^* := P \setminus \{0\}$ monoton wächst auf den Intervallen $[z_{2n+1} + 1, z_{2n+2} + 1]$ ($n \geq 0$) sowie auf $[z_0, 1]$ ($z_0 = 0$) und monoton fällt auf den Intervallen $[z_{2n} + 1, z_{2n+1} + 1]$ ($n \geq 0$).



Wir wollen solche Lösungen einfach oszillierend nennen. In Kapitel II werden wir bei Verzicht auf die Voraussetzung (1.2) Beispiele für langsam schwingende Lösungen erhalten, die nicht einfach oszillierend sind: die Nullstellenabstände der Lösungen sind zwar größer als 1, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen liegt aber mehr als nur ein Extremum.

Mit $x_t^\phi \in C[0,1]$ bezeichnen wir das Segment der Lösung x^ϕ auf dem Intervall $[t, t+1]$, das heißt es ist $x_t^\phi(s) := x^\phi(t+s)$ für $s \in [0,1]$. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Segmente $\{x_{z_{2n}}^\phi\}$ und $\{-x_{z_{2n+1}}^\phi\}$ wieder in P liegen, falls

$\phi \in P$ und τ die Bedingung (1.2) erfüllt.

1.4 DEFINITION (Verschiebeoperatoren)

$T_f : P \rightarrow P$ sei der Verschiebeoperator zur Gleichung (1.1), der definiert ist durch

$$T_f(\phi) := \begin{cases} x_{z_2}^\phi, & \text{falls } z_2 \text{ existiert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\phi \in P^*$ und $T_f(0) := 0$.

$S_f : P \rightarrow P$ sei der Verschiebeoperator zur Gleichung (1.1), der definiert ist durch

$$S_f(\phi) := \begin{cases} -x_{z_1}^\phi, & \text{falls } z_1 \text{ existiert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\phi \in P^*$ und $S_f(0) := 0$.

$R_f : P \rightarrow P$ sei der Operator, der definiert ist durch

$$R_f(\phi) := \tilde{x}^\phi, \quad \text{wo } \tilde{x}^\phi(t) := x^\phi(2-t) - x^\phi(2)$$

für $\phi \in P^*$ und $R_f(0) := 0$.

#

1.5 BEMERKUNGEN

(1) T_f ist der "klassische", zuerst von JONES /16/ studierte Verschiebeoperator.

(2) Der Operator S_f wurde in modifizierter Form (nicht auf dem Kegel P , sondern auf einer konvexen Menge M) von NUSSBAUM /27/ eingeführt.

(3) Unabhängig voneinander definierten und studierten NUSSBAUM /26/ und ANGELSTORF /2/ den Operator R_f , NUSSBAUM im Hinblick auf Existenzaussagen bei Gleichungen mit mehreren Zeitverzögerungen, ANGELSTORF im Hinblick auf Multiplizitätsresultate bei Gleichungen mit einer Zeitverzögerung.

zung. R_f ist kein Verschiebeoperator im eigentlichen Sinne, da das Bild $R_f(\phi)$ kein Teil der Trajektorie ist. Der Vorzug des Operators R_f liegt darin, daß keine Kenntnis über die Lage der Nullstellen z_1 und z_2 benötigt wird. R_f kann als Integraloperator in geschlossener Form dargestellt werden:

$$R_f(\phi)(t) = \int_0^1 f(\phi(1-s))ds, \quad t \in [0,1]$$

(vgl. / 2 /).

#

Aus der Autonomie der Differentialgleichung (1.1) und zusätzlichen Symmetrieüberlegungen im Fall ungerader Nichtlinearitäten f folgt:

1.6 LEMMA

- (1) Fixpunkte von T_f entsprechen Segmenten periodischer Lösungen der Gleichung (1.1) .
- (2) Fixpunkte von R_f und S_f entsprechen Segmenten periodischer Lösungen der Gleichung (1.1), wenn f ungerade ist, das heißt, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: / 2 /, /25/, /27/

1.7 DEFINITION

Die zu T_f -Fixpunkten gehörenden periodischen Lösungen der Gleichung (1.1) heißen periodische Lösungen vom T-Typ. Entsprechend werden die zu S_f - (bzw. R_f -) Fixpunkten gehörenden periodischen Lösungen als periodische Lösungen vom S-Typ (bzw. periodische Lösungen vom R-Typ) bezeichnet.

Aus der Definition der Operatoren R_f , S_f und T_f folgt, daß jeder Fixpunkt von R_f auch Fixpunkt von S_f , jeder Fixpunkt von S_f auch Fixpunkt von T_f ist. Es ist bemerkenswert, daß es NUSSBAUM /27/ gelang, eine Klasse von Nichtlinearitäten anzugeben, für die alle langsam schwingenden periodischen Lösungen periodische Lösungen vom R-Typ sind. Gleichzeitig gibt NUSSBAUM in /27/ ein Beispiel einer Nichtlinearität, die nicht in dieser Klasse liegt und für die die Gleichung (1.1) tatsächlich periodische Lösungen vom S-Typ besitzt, die nicht periodische Lösungen vom R-Typ sind.

Schließlich wollen wir definieren, was wir unter der Stabilität eines Fixpunktes x_0 einer endlichdimensionalen Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ verstehen wollen:

1.8 DEFINITION Sei x_0 Fixpunkt der Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, F sei in einer Umgebung von x_0 differenzierbar. Dann heißt der Fixpunkt x_0 stabil, wenn für alle Eigenwerte $\lambda \in \sigma(F'(x_0))$ gilt: $|\lambda| < 1$.

Für die Definition des Fixpunktindex eines isolierten Fixpunktes verweisen wir auf /1/. Wichtigstes Hilfsmittel zur Berechnung des Fixpunktindex ist für uns der Satz von LERAY-SCHAUDER:

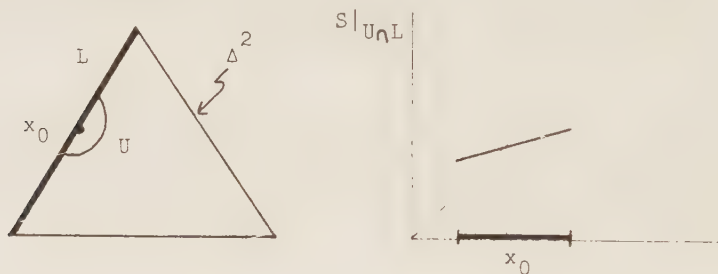
1.9 SATZ (LERAY-SCHAUDER) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $x_0 \in \Omega$ Fixpunkt von F . Sei außerdem F differenzierbar in x_0 und 1 kein Eigenwert von $F'(x_0)$. Dann ist x_0 isolierter Fixpunkt der Abbildung F und der Fixpunktindex $i(F, x_0)$ ist gegeben durch

$$i(F, x_0) = (-1)^m$$

wo m die Anzahl aller Eigenwerte $\lambda > 1$ der Abbildung $F'(x_0)$ ist (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt).

Beweis: / 1 /

1.10 BEMERKUNG In § 6 werden wir mit Hilfe von Satz 1.9 den Fixpunktindex eines isolierten Fixpunktes x_0 einer Abbildung $S : \Delta^2 \rightarrow \Delta^2$ berechnen (Δ^2 = Standard-2-Simplex). Um diesen Index mit Satz 1.9 ausrechnen zu können ($F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$), ist die Beobachtung wesentlich, daß S eine Umgebung U des Fixpunktes x_0 in eine eindimensionale Teilmenge L von Δ^2 abbildet.



Aufgrund der Reduktionseigenschaft des Fixpunktindex gilt dann (U sei so gewählt, daß auf dem Rand ∂U von U keine Fixpunkte von S liegen) :

$$i(S, U, \Delta^2) = i(S|_{U \cap L}, U \cap L, L)$$

$S|_{U \cap L}$ ist aber eine eindimensionale Intervallabbildung, auf die Satz 1.9 angewendet werden kann.

Eine Möglichkeit, den Fixpunktindex direkt im Simplex Δ^2 auszurechnen, bietet Satz 4.12 (vgl. § 4).

‡

§ 2 Chaotisches Verhalten eindimensionaler Differenzengleichungen

Im Jahre 1975 rückten T.Y. LI und J.A. YORKE durch eine Veröffentlichung im American Mathematical Monthly /20/ einen Sachverhalt in das Interesse einer breiten Öffentlichkeit, der schon vorher untersucht worden war (/5/, /38/), aber erst durch diese Arbeit, vielleicht ihres Titels "Period three implies chaos" wegen, populär wurde: chaotisches Verhalten eindimensionaler Differenzengleichungen.

2.1 SATZ ("Period three implies chaos")

Sei $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig und existiere ein Punkt $x_0 \in [a, b]$, so daß $F^3(x_0) \leq x_0 < F(x_0) < F^2(x_0)$.
Dann gilt:

2.1.1 Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein periodischer Punkt der Periode k , das heißt ein Punkt $x \in [a, b]$, so daß

$$F^k(x) = x \quad \text{und} \quad F^j(x) \neq x \quad \text{für alle } j < k.$$

2.1.2 Es existiert eine überabzählbare Menge $S \subset [a, b]$, die keine periodischen Punkte enthält, mit den Eigenschaften:

(a) Für alle $p, q \in S$ mit $p \neq q$ gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |F^n(p) - F^n(q)| = 0$$

(b) Für alle $q \in S$ und jeden periodischen Punkt $p \in [a, b]$ gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0$$

Beweis: /20/

Satz 2.1 macht keine Aussage über das (Lebesgue-) Maß der Menge S . Betrachten wir hierzu die folgenden Beispiele:

2.2 BEISPIEL Die stetige Funktion f_1 , die definiert ist durch

$$f_1 : [0,2] \rightarrow [0,2]$$

$$x \rightarrow \begin{cases} 1 & ; x \in [0,1] \cup [1+\varepsilon,2] \\ 2(x-1)+1 & ; x \in [1,1+\varepsilon/2] \\ -2(x-\varepsilon)+3 & ; x \in [1+\varepsilon/2,1+\varepsilon] \end{cases}$$

hat einen Punkt der Periode 3 (z.B. $\bar{x} = 1 + \frac{2}{9}\varepsilon$). Das nach Satz 2.1 gesicherte chaotische Verhalten der Abbildung f_1 konzentriert sich auf das Intervall $[1,1+\varepsilon]$. Insbesondere ist das (Lebesgue-) Maß der Menge S kleiner als ε .

#

2.3 BEISPIEL Die Abbildung f_2 , definiert durch

$$f_2 : [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow \begin{cases} 3x & ; x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 & ; x \in [1/3, 2/3] \\ 3(x-1) & ; x \in [2/3, 1] \end{cases}$$

hat einen Punkt der Periode 3 (z.B. $\bar{x} = \frac{3}{28}$). Es werden jedoch (im maßtheoretischen Sinn) fast alle Anfangswerte nach endlich vielen Iterationen auf den (instabilen) Fixpunkt $x = 0$ abgebildet. Man überlegt sich nämlich leicht, daß die Menge

$$M = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(0)$$

Komplement einer Cantor-Menge C ist. In C sind sowohl die Menge S der aperiodischen Punkte als auch alle periodischen Punkte enthalten.

#

Satz 2.1 ist ein eindimensionales Resultat. Für n -dimensionale Differenzengleichungen wurde von MAROTTO /24/ das Konzept eines "snap-back-repellers" entwickelt. Da n -dimensionale Differenzengleichungen nicht der Gegenstand dieser Arbeit sind, gehen wir hierauf nicht weiter ein. Es sei lediglich bemerkt, daß sich auch für diesen n -dimensionalen Fall analoge Beispiele wie zuvor angeben lassen.

Der Nachweis chaotischen Verhaltens im Sinne von LI und YORKE (das heißt im Sinne von Satz 2.1) wird also immer nur ein erster Schritt sein, die Komplexität eines dynamischen Systems zu beschreiben.

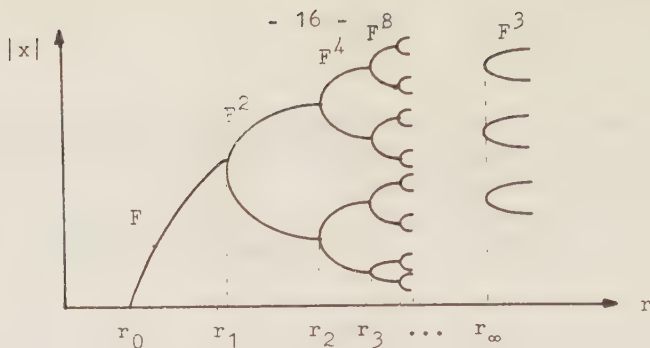
2.4 BEMERKUNG In Spezialfällen kann das Auftreten eines Punktes der Periode 3 als sukzessives "Abzweigen" periodischer Punkte verstanden werden. Ist beispielsweise F die parameterabhängige Abbildung, definiert durch

$$F(x) := F_r(x) = rx(1-x) \quad (0 \leq r \leq 4)$$

so treten die Fixpunkte für die iterierten $F_r^{p_j}$ in Abhängigkeit vom Parameter r in der Reihenfolge einer SHARKOVSKII-Folge /38/ auf:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_j + \dots$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^j + \dots + 7 \cdot 2^j + 5 \cdot 2^j + 3 \cdot 2^j + \dots + 7 + 5 + 3$$



Das Chaos-Resultat in /20/ ist durch die spezielle Gleichung

$$(2.5) \quad x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) =: F(x_n)$$

motiviert. In diesem Fall treten die periodischen Punkte für F in Abhängigkeit vom Parameter r in der Reihenfolge einer SHARKOVSKII-Folge auf. Für $r > 3.84$ besitzt F einen Punkt der Periode 3 und damit Punkte jeder Periode sowie aperiodische Punkte (/20/). Als "einfachste" nichtlineare Gleichung (linear + quadratischer Störterm) ist diese Gleichung Prototyp eines nichtlinearen Modells, das in zahlreichen Anwendungen auftreten kann, wenn man über eine lineare Modellierung hinausgeht (vgl. /11/, /21/).

Interpretiert man Gleichung (2.5) als Diskretisierung der VERHULST-Gleichung

$$(2.6) \quad P'(t) = P(t)(1 - P(t))$$

$$(P'(t) \approx \frac{P(t+h) - P(t)}{h} =: \frac{P_{n+1} - P_n}{h} ; \quad x_n = \frac{\gamma h}{1 + \gamma h} P_n ; \quad r = 1 + \gamma h)$$

so sind die im Parameterbereich $r > 3$ (das heißt $h > \frac{2}{\gamma}$) für Gleichung (2.5) auftretenden periodischen Punkte für die Differentialgleichung (2.6) "irrelevant": das heißt, die oszillierenden Lösungen der Differenzenapproximation (2.5) entsprechen nicht Lösungen der Differentialgleichung (2.6). Diese hat nämlich neben den Gleichgewichtslösungen $P \equiv 0$ und $P \equiv 1$ für Anfangswerte $P_0 = P(0) \in (0,1)$ die eindeutige nichttriviale Lösung

$$P(t) = \frac{P_0}{P_0 + (1-P_0)e^{-\gamma t}}$$

Die Entscheidung darüber, welche (vermöge Diskretisierung) numerisch ermittelten Lösungen für die zugrundeliegende Differentialgleichung "relevant" sind, ist im allgemeinen nur bei genauer Kenntnis des Lösungsverhaltens der Differentialgleichung möglich. Der Problemkreis "numerisch irrelevanter Lösungen" ist erst seit kurzer Zeit im Zusammenhang mit globalen Fragestellungen als zentral erkannt worden und wird zur Zeit intensiv untersucht (/33/).

Andere Beispiele chaotischer Gleichungen sind die Gleichung von GOMPERTZ

$$(2.7) \quad x_{n+1} = r x_n e^{-a x_n}$$

sowie

$$(2.8) \quad x_{n+1} = r \frac{x_n}{1 + |x_n|^N} \quad (N > 2)$$

(vgl. /11/).

In diesen Gleichungen ist die einfache quadratische Nichtlinearität $f(x) = x(1-x)$ durch die "Buckelfunktionen" $g(x) = x e^{-a x}$ bzw. $h(x) = x(1 + |x|^N)^{-1}$ ersetzt.

Die zeitverzögerten Differentialgleichungen

$$(2.9) \quad P'(t) = \alpha \frac{P(t-\tau)}{1 + P(t-\tau)^n} - \beta P(t)$$

und

$$(2.10) \quad P'(t) = \alpha e^{-\gamma P(t-\tau)} - \beta P(t)$$

treten als Modelle bei physiologischen Kontrollsystemen auf (vgl. /6/, /22/). Die zeitliche Veränderung $P'(t)$ der Dichte der Population $P(t)$ ist bestimmt durch eine Wachstumsrate abzüglich einer Sterberate. Während die Sterberate proportional zur

Dichte ist, hängt die Wachstumsrate zur Zeit t bei beiden Gleichungen in Form einer "Buckelfunktion" von der Dichte der Population in der Vergangenheit $t-\tau$ ab.

GLASS und MACKEY studierten das Verhalten der Gleichung (2.9) in Abhängigkeit von der Zeitverzögerung τ (bei festen Parametern α , β und n). In numerischen Experimenten wurde beobachtet, daß sich für kleine Zeitverzögerungen τ ein stabiler Gleichgewichtszustand für P einstellt, der bei größer werdender Zeitverzögerung τ instabil wird und zunächst in eine periodische Lösung übergeht. Diese periodische Lösung geht bei weiter anwachsendem τ in eine periodische Lösung mit annähernd doppelter Periode über. So konnten bei wachsendem τ sukzessiv periodische Lösungen mit annähernd doppelter, vierfacher, achtfacher und sechzehnfacher Periode der Ausgangslösung beobachtet werden, in Analogie zur periodenverdoppelnden Verzweigung bei Gleichung (2.5). Schließlich gibt es auch Parameterbereiche, in denen kein sichtbares periodisches Verhalten vorliegt, wo also die Oszillation "chaotisch" ist. Es kann als ausgeschlossen gelten, daß es sich bei diesen Phänomenen um ein numerisches Artefakt handelt (vgl. VERHULST-Gleichung und Diskretisierung) (/22/).

Vermöge der Transformation $t \rightarrow \frac{t}{\tau}$ ist Gleichung (2.9) äquivalent zur Gleichung

$$(2.11) \quad x'(t) = \tau \left(\alpha \frac{x(t-1)}{1 + x(t-1)^n} - \beta x(t) \right)$$

Für große τ kann man diese Differentialgleichung als Störung der Differenzengleichung

$$(2.12) \quad x(t) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{x(t-1)}{1 + x(t-1)^n} =: f(x(t-1))$$

auffassen. Gleichung (2.12) entspricht Gleichung (2.8); chaotisches Verhalten dieser Differenzengleichung ist bei geeigneter Wahl von α , β und n nach Satz 2.1 gewährleistet.

Ist für die Differentialgleichungen (2.9) und (2.10) als Störungen chaotischer Differenzengleichungen chaotisches Verhalten

in gewissen Parameterbereichen also wenigstens heuristisch zu erwarten, so liegt es jedoch keineswegs nahe, auch für die durch Gleichung (2.9) motivierte (vgl. /27/, /30/) Gleichung

$$(2.13) \quad x'(t) = -\alpha \frac{x(t-1)}{1 + |x(t-1)|^n}$$

chaotisches Verhalten zu vermuten. Zum einen kann diese Gleichung wegen des fehlenden gegenwartsabhängigen Terms nicht mehr in offensichtlicher Weise als Störung einer bekannten chaotischen Differenzengleichung interpretiert werden, zum andern scheint sie auch zu Gleichung (2.9) - trotz äußerer Ähnlichkeit - nicht in Beziehung zu stehen. Insbesondere ist Gleichung (2.13) wegen des negativen Vorzeichens kein "Produktionsmodell". Gleichung (2.13) beschreibt ein eindimensionales zeitabhängiges, rückgekoppeltes System mit einer Gleichgewichtslage $x \equiv 0$. Die Art der Rückkopplung wird durch die Buckelfunktion $f(x) = x(1 + |x|^n)^{-1}$ beschrieben: für kleine Abweichungen von der Gleichgewichtslage $x \equiv 0$ ist die Rücktreibung annähernd proportional zur Auslenkung, für große Abweichungen geht die Rückkopplung gegen 0.

Präziser lautet die offenbar durch das Verzweigungsverhalten der Gleichung (2.5) und die numerischen Resultate zur Gleichung (2.9) motivierte Vermutung betreffend chaotisches Verhalten der Gleichung (2.13):

2.14 VERMUTUNG (NUSSBAUM-YORKE /27/, /28/, /30/)

Falls n groß genug ist (z.B. $n = 8$) und der Parameter α in Abhängigkeit von n geeignet gewählt ist, dann hat Gleichung (2.13) unendlich viele verschiedene periodische Lösungen. Diese Lösungen entstehen durch Verzweigungen in den Parameterwerten $\alpha_1, \alpha_2, \dots$: Fixpunkte des Verschiebeoperators $S_\alpha^{2\alpha}$ werden instabil in α_1 und es zweigen Fixpunkte von $S_\alpha^{2\alpha}$ ab; diese werden instabil in α_2 und es zweigen Fixpunkte von S_α^4 ab und

so fort. Schließlich existieren Fixpunkte für alle iterierten S_{α}^j , $j \in \mathbb{N}$, und aperiodische Lösungen.

#

2.15 BEMERKUNG In einer umfangreichen numerischen Analyse wurde die Vermutung (2.14) partiell bestätigt. Mit Hilfe simplizialer Verfahren wurden sekundäre ($S_{\alpha} \rightarrow S_{\alpha}^2$) sowie tertiäre ($S_{\alpha}^2 \rightarrow S_{\alpha}^4$) Verzweigungen nachgewiesen (/18/).

#

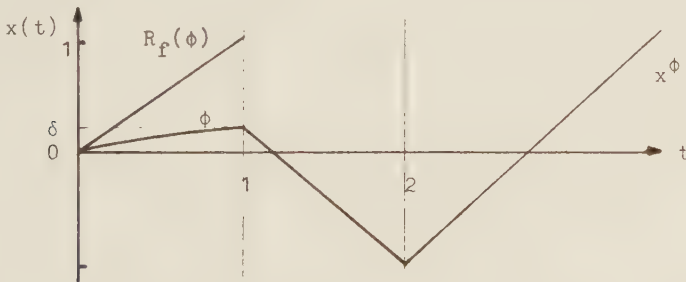
§ 3 Treppenfunktionen als Modell-Nichtlinearitäten

Unter verschiedenen möglichen Modellfunktionen (stückweise polynomial, stückweise exponentiell) entscheiden wir uns für die einfachsten, nämlich stückweise konstante Funktionen, also Treppenfunktionen f . Wir beschränken uns außerdem auf ungerade Funktionen f , das heißt Funktionen f , für die gilt: $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist f stückweise konstant, so haben Lösungen der Differentialgleichung

$$(3.1) \quad x'(t) = -f(x(t-1))$$

offenbar stückweise konstanten Anstieg.

Die Definition der Verschiebeoperatoren kann wörtlich übernommen werden. Jedoch sind wegen der Unstetigkeitsstellen von f die Verschiebeoperatoren im allgemeinen nicht mehr stetig. Sei zum Beispiel $f(x) := \text{sign}(x)$. Dann ist definitionsgemäß $R_f(0) = 0$, aber $\|R_f(\phi)\| = 1$ für jedes $\phi \in P^*$ (insbesondere also auch für $\phi \neq 0$ mit $\|\phi\| < \delta$). Das heißt aber, daß R_f in $\phi = 0$ unstetig ist.



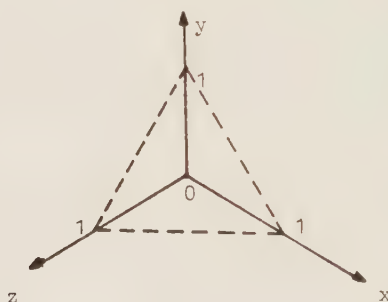
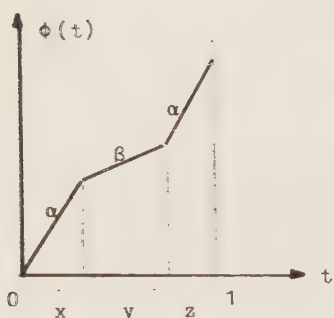
Für die im folgenden gewählten Nichtlinearitäten f wird es uns aber gelingen, Teilmengen von P zu finden, auf denen die Verschiebeoperatoren stetig sind (vgl. Lemma 3.3 und Satz 4.8).

Wir beschränken uns im folgenden auf die Diskussion eines ungeraden Zweistufen-Modells, wählen also

$$(3.2) \quad f(x) = f_{\alpha,\beta}(x) = \text{sign}(x) \cdot \begin{cases} \alpha & ; |x| < 1 \\ \beta & ; |x| \geq 1 \end{cases}$$

Sei $M_{\alpha,\beta}$ die folgendermaßen definierte Teilmenge des Kegels P der monoton wachsenden Funktionen $\phi \in C[0,1]$ mit $\phi(0) = 0$:

$$M_{\alpha,\beta} := \{ \phi \in P \mid \phi(t) = \begin{aligned} &\alpha t && ; t \in [0, x) \\ &\beta t + (\alpha - \beta)x && ; t \in [x, x+y) ; 0 < x, y ; x+y < 1 \\ &\alpha t + (\beta - \alpha)y && ; t \in [x+y, 1] \end{aligned} \}$$



Setzen wir $z := 1-x-y$, so ist $M_{\alpha,\beta}$ homöomorph zum offenen 2-Simplex $\Delta^2 := \{(x,y,z) \mid x+y+z=1, 0 < x,y,z < 1\}$, wobei die Identifikation durch die Koordinaten x, y, z geliefert wird:

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\beta} &\longleftrightarrow \Delta^2 \\ \phi &\longleftrightarrow (x,y,z) \end{aligned}$$

Wir vergrößern $M_{\alpha,\beta}$ noch um die Menge $N_{\alpha,\beta}$, die folgendermaßen definiert ist:

$$N_{\alpha,\beta} := \{ \phi \in P \mid \phi(t) = \begin{aligned} &\beta t && ; t \in [0, y) \\ &\alpha t + (\beta - \alpha)y && ; t \in [y, 1] \end{aligned} ; 0 < y < 1 \}$$

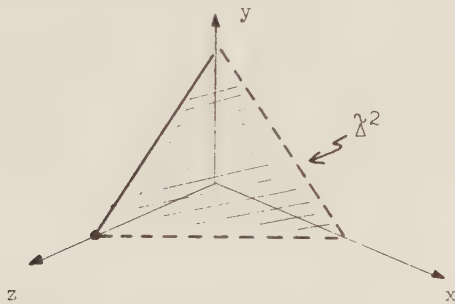
sowie um die Funktion ϕ_0 , definiert durch $\phi_0(t) = \alpha t, t \in [0,1]$.
Wir erhalten so die Menge

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta} := M_{\alpha,\beta} \cup N_{\alpha,\beta} \cup \{\phi_0\}$$

Identifizieren wir $N_{\alpha,\beta}$ mit $\overset{\circ}{\Delta}^1 := \{(0,y,z) \mid y+z=1; 0 < y < 1\}$
und ϕ_0 mit dem Punkt $(0,0,1) \in \overset{\circ}{\Delta}^2$, so ist die Funktionenmenge

$\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ homöomorph zu der Menge

$$\chi^2 := \overset{\circ}{\Delta}^2 \cup \overset{\circ}{\Delta}^1 \cup \{(0,0,1)\} \subset \Delta^2$$



Beachte, daß für $\alpha, \beta \neq 0$ die triviale Funktion $\phi \equiv 0$
nicht in $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ liegt.

3.3 LEMMA Sei $P^* := P \setminus \{0\}$, $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ die zuvor konstruierte
Teilmenge von P^* und $\mathcal{N}_{\alpha,\beta} := N_{\alpha,\beta} \cup \{\phi_0\}$.

Dann gilt:.

$$(1) \quad R_{\alpha,\beta}(P^*) \subset \mathcal{N}_{\alpha,\beta}$$

$$(2) \quad S_{\alpha,\beta}(P^*) \subset \mathcal{M}_{\alpha,\beta}$$

Dabei sei $R_{\alpha,\beta} := R_{f_{\alpha,\beta}}$ und $S_{\alpha,\beta} := S_{f_{\alpha,\beta}}$.

Beweis: Wir beweisen das Lemma nur für den Operator $S_{\alpha, \beta}$.
Der Beweis für $R_{\alpha, \beta}$ verläuft analog.

Sei also $\phi \in P^*$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $\|\phi\| = \phi(1) \leq 1$

Dann hat die Lösung x^ϕ der Gleichung (3.1) zur Anfangsfunktion ϕ eine Nullstelle in $z_1 = 1 + \phi(1)/\alpha$ und konstanten Anstieg $-\alpha$ auf dem Intervall $[z_1, z_1+1]$. Das heißt das Bild der Anfangsfunktion ϕ unter $S_{\alpha, \beta}$ ist die Funktion $\phi_0 \in \mathcal{M}_{\alpha, \beta}$.

Fall 2: $\|\phi\| = \phi(1) > 1$

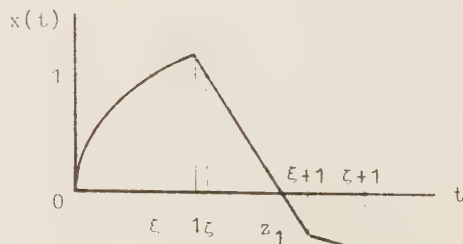
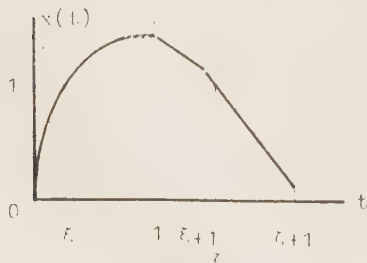
Dann existiert genau ein $\xi \in (0, 1)$, so daß $\phi(\xi) = 1$. Auf dem Intervall $[1, \xi+1]$ hat die Lösung x^ϕ konstanten Anstieg $-\alpha$. Ist $x^\phi(1+\xi) < 0$, so existiert eine Nullstelle $z_1 \in [1, 1+\xi]$ und das Segment $-x_{z_1}^\phi = S_{\alpha, \beta}(\phi)$ ist offensichtlich in der Menge $\mathcal{M}_{\alpha, \beta}$.

Ist $0 \leq x^\phi(1+\xi) \leq 1$, so existiert genau ein $\zeta \in [1, 1+\xi]$ derart, daß $x^\phi(\zeta) = 1$. Falls $x^\phi(\zeta+1) > 0$, so ist $-x_{z_1}^\phi \equiv \phi_0$;

falls $x^\phi(\zeta+1) \leq 0$, so ist $-x_{z_1}^\phi \in \mathcal{N}_{\alpha, \beta}$.

Ist schließlich $x^\phi(1+\xi) > 1$, so existiert genau ein $\zeta > 1+\xi$ mit $x^\phi(\zeta) = 1$. Auf dem Intervall $[\zeta, \zeta+1]$ hat x^ϕ konstanten Anstieg $-\beta$. Ist $x^\phi(\zeta+1) \geq 0$, dann ist $-x_{z_1}^\phi \equiv \phi_0$; ist

$x^\phi(\zeta+1) < 0$, dann ist $-x_{z_1}^\phi \in \mathcal{N}_{\alpha, \beta}$.



ged.

Da insbesondere $\mathcal{M}_{\alpha,\beta} \subset P^*$, ist durch Angabe der Menge $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ für die Treppenfunktion (3.2) auf elementare Weise gelungen, was bei den "klassischen" Existenzsätzen zum Nachweis periodischer Lösungen (im Falle stetiger Funktionen f) mit großen Schwierigkeiten verbunden ist: eine unter dem Verschiebeoperator invariante Menge zu isolieren, die die triviale Lösung 0 nicht enthält (/27/, /40/).

3.4 BEMERKUNG Lemma 3.3 zeigt, daß gewisse Punkte des Randes $\partial\Delta^2$ des Simplex Δ^2 nicht als Bildpunkte unter $S_{\alpha,\beta}$ auftreten. Dennoch entsprechen auch diese Punkte (vermöge ihrer Koordinaten x,y,z) stückweis linearen Funktionen $\phi \in P^*$, so daß der Verschiebeoperator $S_{\alpha,\beta}$ eine Abbildung $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ auf ganz Δ^2 induziert.

Diese induzierte Abbildung werden wir in § 4 berechnen. Aufgrund von Lemma 3.3 wissen wir bereits, daß

$$\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(\Delta^2) \subset \Delta^2 \quad \neq \quad \Delta^2.$$

In § 4 wird sich herausstellen, daß $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(\Delta^2)$ sogar in einer eindimensionalen Teilmenge von Δ^2 enthalten ist.

#

Ehe wir die von $S_{\alpha,\beta}$ induzierte Abbildung $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ in einem Spezialfall ($\beta = 1$) explizit berechnen, wollen wir Möglichkeiten und Grenzen einer Modellierung durch Treppenfunktionen am Beispiel eines globalen Verzweigungsdiagramms diskutieren.

EIN BEISPIEL :

Wie von KAPLAN und YORKE /19/ bemerkt wurde, korrespondieren periodische Lösungen vom R-Typ der Gleichung

$$(3.5) \quad x'(t) = -f(x(t-1))$$

zu periodischen Lösungen der Periode 4 des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

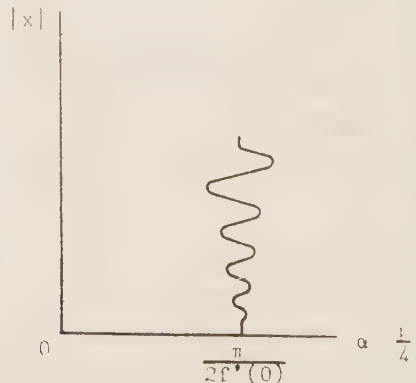
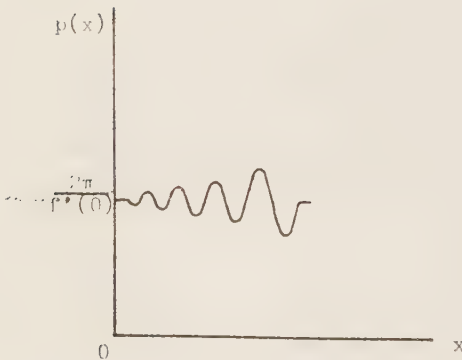
$$(3.6) \quad \begin{aligned} x'(t) &= -f(y(t)) \\ y'(t) &= f(x(t)) \quad (y(t) = x(t-1)) \end{aligned}$$

Hierbei geht lediglich die Ungeradheit von f ein. Insbesondere bleibt die Identifikation richtig für den Fall, daß f Treppenfunktion (also unstetig) ist.

ANGELSTORF / 3 / verallgemeinerte diese Beobachtung dahingehend, daß periodische Lösungen der Gleichung (3.6) mit Periode p periodischen Lösungen vom R-Typ der Gleichung

$$(3.7) \quad x'(t) = -\frac{p}{4} f(x(t-1)) =: -\alpha f(x(t-1))$$

entsprechen. Das heißt, daß die Periode $p = p(a)$ einer durch den Punkt $(x, y) = (a, 0)$ verlaufenden periodischen Lösung $(x(t), y(t))$ der Gleichung (3.6) eindeutig eine Gleichung (3.7) festlegt, für die $x(t)$ periodische Lösung vom R-Typ ist. Die Periodenabbildung für Gleichung (3.6) wird damit zum Verzweigungsdiagramm für Gleichung (3.7) :



Wir berechnen die Periodenabbildung zur Gleichung (3.6) im Spezialfall der Funktion

$$(3.8) \quad f(x) = \text{sign}(x) \cdot \begin{cases} a & ; |x| < 1 \\ b & ; |x| \geq 1 \end{cases} \quad (a \leq b)$$

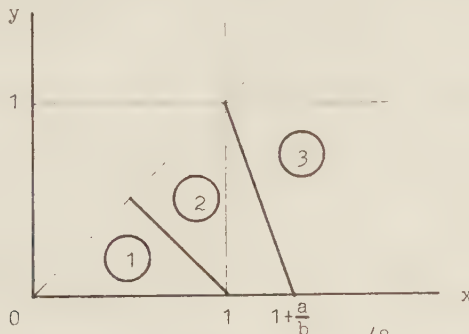
3.9 LEMMA Die Periodenabbildung $p(x)$ des Systems (3.6) mit Nichtlinearität (3.8) ist gegeben durch

$$p(x) = \begin{cases} \frac{4}{a} x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{4}{a} \left(\frac{2a-b}{a} x + \frac{b-a}{a} \right) & ; 1 \leq x \leq 1 + \frac{a}{b} \\ \frac{4}{b} \left(x + 1 - \frac{a}{b} \right) & ; 1 + \frac{a}{b} \leq x \end{cases}$$

Beweis: Aus Symmetriegründen reicht es aus, die Zeit $p/8$ bis zum Erreichen der Diagonale $x=y$ zu berechnen.

Sei t_x (bzw. t_y) die Zeit, zu der der Wert $x \equiv 1$ (bzw. $y \equiv 1$) erreicht wird.

Drei Fälle sind zu unterscheiden:



$$(1) \quad 0 \leq x \leq 1 : \quad \begin{aligned} x\left(\frac{p}{8}\right) &= x - \int_0^{p/8} f(y) dt = x - a \frac{p}{8} \\ y\left(\frac{p}{8}\right) &= 0 + \int_0^{p/8} f(x) dt = a \frac{p}{8} \end{aligned}$$

Daraus folgt: $x = a \frac{p}{4}$, also $p = p(x) = \frac{4}{a} x$.

$$(2) \quad 1 \leq x \leq 1 + \frac{a}{b} :$$

$$x\left(\frac{p}{8}\right) = x - a \frac{p}{8} \quad (\text{da } y < 1, \text{ ist } f(y) \equiv a)$$

$$\begin{aligned} y\left(\frac{p}{8}\right) &= 0 + \int_0^{t_x} f(x) dt + \frac{p/8}{t_y} \int_{t_y}^{p/8} f(x) dt \\ &= bt_x + a\left(\frac{p}{8} - t_x\right) \end{aligned}$$

Um t_x zu berechnen, bemerken wir, daß $V(x, 0) = V(1, y(t_x))$
($V(x, y) := \int_0^x f(s) ds + \int_0^y f(s) ds$) (Gleichung (3.6) ist Hamil-

tonsches System!). Dies liefert: $a + b(x-1) = a + ay(t_x)$.

Da $y(t_x) = \int_0^{t_x} b dt = bt_x$, folgt hieraus: $t_x = \frac{x-1}{a}$.

Dies oben eingesetzt liefert die Behauptung im Fall (2).

$$(3) \quad 1 + \frac{a}{b} \leq x :$$

$$x\left(\frac{p}{8}\right) = x - at_y - \left(\frac{p}{8} - t_y\right)b$$

$$y\left(\frac{p}{8}\right) = 0 + \frac{1}{8}b$$

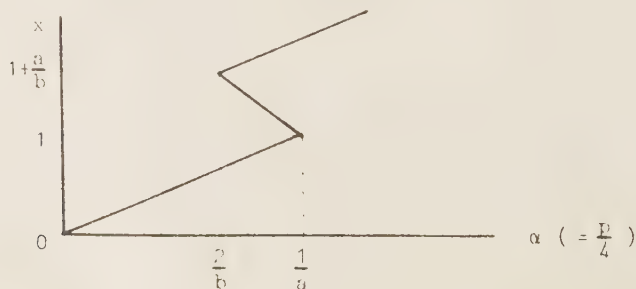
Daraus folgt: $p = p(x) = \frac{4}{b} (x + (b-a)t_y)$.

Über die Beziehung $V(x, 0) = V(x(t_y), 1)$ berechnet man $t_y = \frac{1}{b}$.

Dies ergibt schließlich $p(x) = \frac{4}{b} (x + 1 - \frac{a}{b})$.

qed.

Der Periodenabbildung $p(x)$ entspricht das Verzweigungsdiagramm:



ENDE DES BEISPIELS

Mit dem denkbar einfachsten nichtlinearen Modellansatz lassen sich also bereits globale Phänomene wie Eindeutigkeit periodischer Lösungen vom R-Typ ($b < 2a$), Multiplizität ($b > 2a$), Rückverzweigung erfassen. Die Verzweigung im Parameterwert $\alpha = 0$, die für eine glatte Gleichung (d.h. f differenzierbar und $f'(0) < \infty$) nicht eintritt, läßt sich als Grenzfall interpretieren.

Es erscheint naheliegend, Verzweigungsdiagramme auch für Mehrstufen-Modelle zu berechnen, etwa mit dem Ziel, die Berechnung des Verzweigungsdiagramms einer glatten Gleichung auf die Berechnung eines die glatte Gleichung approximierenden Treppenfunktions-Modells zu reduzieren. Jedoch führt dieser Versuch aufgrund zahlreicher Fallunterscheidungen auf ähnliche Schwierigkeiten wie die direkte Behandlung der glatten Gleichung. Allerdings kann es numerisch sinnvoll sein, diesen Weg zu verfolgen (Diskretisierung der Nichtlinearität anstelle einer Diskretisierung der Lösung) (vgl. /36/).

Wir werden im folgenden den Wert einer Diskussion von Treppenfunktions-Modellen nicht daran messen, ob sich im Hinblick auf glatte Gleichungen präzise quantitative Aussagen herleiten lassen, sondern vielmehr daran, ob einfache nichtlineare Modellgleichungen qualitative Phänomene generieren können, die im Rahmen der vorherrschenden methodischen Ansätze in der Literatur bisher nicht beobachtet wurden bzw. nicht behandelt werden können.

§ 4 Sekundärverzweigung bei einer Modell-Gleichung

Anstelle der Gleichung

$$(4.1) \quad x'(t) = -\alpha \frac{x(t-1)}{1 + |x(t-1)|^n} \quad (n \geq 2)$$

studieren wir in diesem Abschnitt die Modell-Gleichung

$$(4.2) \quad x'(t) = -f_\alpha(x(t-1))$$

mit

$$(4.3) \quad f_\alpha(x) = \text{sign}(x) \cdot \begin{cases} \alpha & ; \quad |x| < 1 \\ 1 & ; \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf diese spezielle Modell-Funktion. Allgemeine Zweistufen-Modelle (Mehrparameter-Probleme) sollen später diskutiert werden.

In Gleichung (4.2) tritt α als innerer Parameter auf im Unterschied etwa zu Gleichung (3.7). Den Zweig der periodischen Lösungen vom R-Typ der Gleichung (4.2) kann man sich deshalb nicht über die Periodenabbildung verschaffen. Insbesondere ist auch der Zweig der periodischen Lösungen vom R-Typ im Verzweigungsdiagramm nicht mehr stückweise linear wie im Beispiel in § 3.

Wir berechnen jetzt explizit die durch die Verschiebeoperatoren $R_\alpha := R_{f_\alpha}$ und $S_\alpha := S_{f_\alpha}$ auf dem 2-Simplex Δ^2 induzierten Abbildungen $\tilde{R}_\alpha$ und $\tilde{S}_\alpha$. Zur Erinnerung daran, daß Punkte in Δ^2 Funktionen aus der Menge $\eta_{\alpha,1}$ zugeordnet sind, wollen wir ab jetzt Δ^2 mit dem Index α versehen: Δ_α^2 .

(a) Der Operator R_α :

Die Norm $\|\phi\| = \sup_{t \in [0,1]} |\phi(t)|$ einer Anfangsfunktion

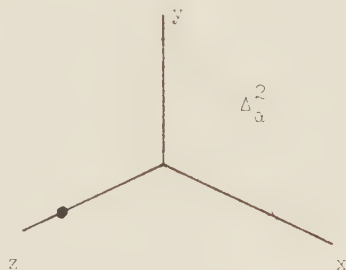
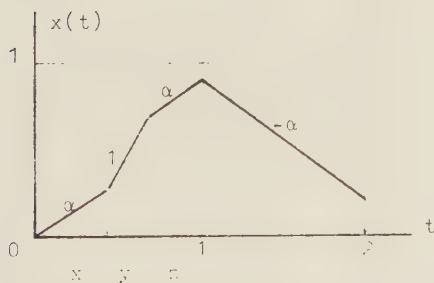
$\phi \in \mathcal{M}_\alpha := \mathcal{M}_{\alpha,1}$ ist gegeben durch den Wert von ϕ an der Stelle 1 : $\|\phi\| = \phi(1) = \alpha x + y + \alpha(1-x-y) = (1-\alpha)y + \alpha$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall : $\alpha \leq 1$

Wegen $0 \leq y \leq 1$ ist dann $\|\phi\| \leq 1$ und die Lösung x^ϕ der Gleichung (4.2) hat auf dem Intervall $(1,2)$ konstanten Anstieg $-\alpha$, das heißt das Bild der Anfangsfunktion ϕ unter R_α ist die Funktion $\phi_0 \in C[0,1]$ mit konstantem Anstieg $+\alpha$. Diese Funktion ist mit dem Punkt $(0,0,1) \in \Delta_\alpha^2$ identifiziert.

Das heißt: für $\alpha \leq 1$ wird jeder Punkt $(x,y,z) \in \Delta_\alpha^2$ unter R_α auf den Punkt $(0,0,1)$ abgebildet.



2. Fall : $\alpha > 1$

Wegen $0 \leq y \leq 1$ ist $\|\phi\| \geq 1$. Da $\phi = \phi(x,y,z) \in \mathcal{M}_\alpha$ monoton wächst, existiert genau ein $\xi = \xi(x,y,z) \in (0,1)$, so daß $\phi(\xi) = 1$. Im Intervall $[1,2]$ hat die Lösung x^ϕ daher konstanten Anstieg $-\alpha$ auf dem Intervall $[1,\xi+1]$ und konstanten Anstieg -1 auf $(\xi+1,2]$, das heißt das Bild der Anfangsfunktion

ϕ unter R_α liegt in der Menge N_α , die mit der Seite $\{(0,y,z) \mid 0 < y,z < 1; y+z=1\} \subset \Delta_\alpha^2$ identifiziert ist. Die Abbildung R_α ist damit im Falle $\alpha > 1$ gegeben durch

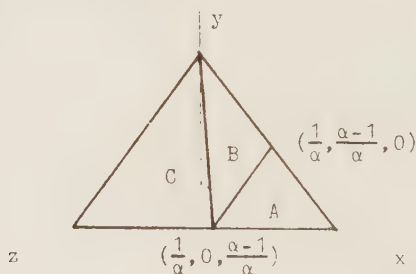
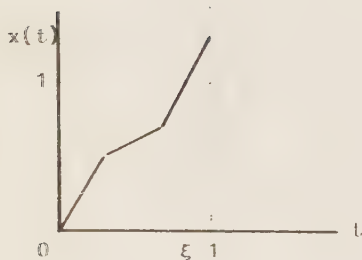
$$(4.4) \quad R_\alpha : (x,y,z) \mapsto (0, 1-\xi, \xi)$$

Zur Berechnung von ξ unterscheiden wir drei Fälle:

- (A) $1 \leq \alpha x$
- (B) $\alpha x \leq 1 \leq \alpha x + y$
- (C) $\alpha x + y \leq 1$

Diesen drei Möglichkeiten entspricht eine Zerlegung des Simplex Δ_α^2 in die Mengen

$$\begin{aligned} A &:= \{(x,y,z) \in \Delta_\alpha^2 \mid 1 \leq \alpha x\} \\ B &:= \{(x,y,z) \in \Delta_\alpha^2 \mid \alpha x \leq 1 \leq \alpha x + y\} \\ C &:= \{(x,y,z) \in \Delta_\alpha^2 \mid \alpha x + y \leq 1\} \end{aligned}$$



Es ist im Falle

- (A) : $\alpha \xi = 1$, d.h. $\xi = \frac{1}{\alpha}$
- (B) : $\alpha x + (\xi - x) = 1$, d.h. $\xi = 1 + (1-\alpha)x$
- (C) : $\alpha x + y + \alpha(\xi - x - y) = 1$, d.h. $\xi = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} y$

Einsetzen der für ξ möglichen Fälle in (4.4) liefert:

4.5 SATZ Der Verschiebeoperator R_α zur Gleichung (4.2) mit der Nichtlinearität (4.3) induziert eine Selbstabbildung $\tilde{R}_\alpha : \Delta_\alpha^2 \rightarrow \Delta_\alpha^2$, die gegeben ist durch

$$\tilde{R}_\alpha : (x, y, z) \rightarrow \begin{cases} (0, 0, 1) & ; \alpha \leq 1 \\ (0, \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}) & ; \alpha > 1 ; (x, y, z) \in A \\ (0, (\alpha-1)x, 1-(\alpha-1)x) & ; " ; (x, y, z) \in B \\ (0, \frac{\alpha-1}{\alpha}y, 1-\frac{\alpha-1}{\alpha}y) & ; " ; (x, y, z) \in C \end{cases}$$

$\tilde{R}_\alpha$ ist stückweise linear und stetig. Der einzige Fixpunkt der Abbildung $\tilde{R}_\alpha$ ist

$$(\bar{x}(\alpha), \bar{y}(\alpha), \bar{z}(\alpha)) = \begin{cases} (0, 0, 1) & ; 0 \leq \alpha \leq 1 \\ (0, \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}, \frac{\alpha}{2\alpha-1}) & ; 1 < \alpha \end{cases}$$

Beweis: Offensichtlich ist $\tilde{R}_\alpha$ linear auf A, B und C. Die Stetigkeit auf den gemeinsamen Grenzen $A \cap B$ bzw. $B \cap C$ rechnet man leicht nach. Da die erste Koordinate aller Bildpunkte 0 ist, können Fixpunkte nur in C liegen. Die Bestimmungsgleichung

$$(x, y, z) = (0, \frac{\alpha-1}{\alpha}y, 1 - \frac{\alpha-1}{\alpha}y)$$

liefert für $\alpha > 1$ den eindeutigen Fixpunkt $(0, \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}, \frac{\alpha}{2\alpha-1})$. Für $0 < \alpha \leq 1$ ist offensichtlich $(0, 0, 1)$ einziger Fixpunkt.

q.e.d.

Interpretation des $\tilde{R}_\alpha$ -Fixpunktes als Fixpunkt des Operators R_α liefert:

4.6 KOROLLAR Gleichung (4.2) hat für alle $\alpha > 0$ genau eine periodische Lösung vom R-Typ.

Beweis: klar ...

q.e.d.

(b) Der Operator S_α :

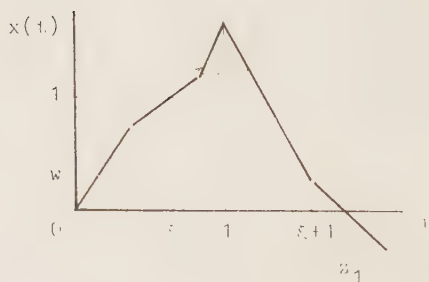
Um die vom Verschiebeoperator S_α induzierte Abbildung $S_\alpha : \Delta_\alpha^2 \rightarrow \Delta_\alpha^2$ ausrechnen zu können, ist die Berechnung der ersten Nullstelle $z_1 = z_1(\phi) > 1$ der Lösung x^ϕ erforderlich. Dazu sind - ausgehend von der Unterteilung des Simplex Δ_α^2 in die Teile A, B und C - weitere Fallunterscheidungen erforderlich.

Für $\alpha \leq 1$ liefert eine ähnliche Überlegung wie für R_α , daß jeder Punkt $(x, y, z) \in \Delta_\alpha^2$ auf $(0, 0, 1)$ abgebildet wird.

Sei also $\alpha > 1$. Wegen $0 \leq y \leq 1$ ist $\|\phi\| \geq 1$. Da $\phi = \phi(x, y, z) \in M_\alpha$ monoton wächst, existiert genau ein $\xi = \xi(x, y, z) \in (0, 1)$, so daß $\phi(\xi) = 1$. Sei $w := x^\phi(\xi+1)$.

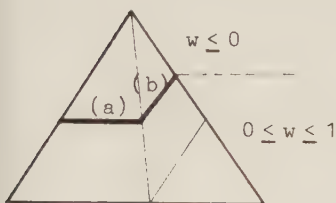
Wir unterscheiden folgende Fälle:

- (1) $w \leq 0$
- (2) $0 \leq w \leq 1$
- (3) $1 \leq w$



4.7 LEMMA Für $1 < \alpha \leq 2$ treten nur die Fälle (1) und (2) auf, für $\alpha > 2$ treten (1), (2) und (3) auf. Genauer werden die Bereiche, wo die verschiedenen Fälle eintreten, durch die folgenden Diagramme beschrieben:

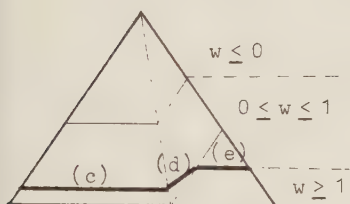
$$1 < \alpha \leq 2 :$$



$$(a) \quad \{(x, y, z) \in \Delta_{\alpha}^2 \mid y = \frac{1}{2}\}$$

$$(b) \quad \{(x, y, z) \in \Delta_{\alpha}^2 \mid y = \alpha x\}$$

$$\alpha > 2 :$$



$$(c) \quad \{(x, y, z) \in \Delta_{\alpha}^2 \mid y = \frac{\alpha-2}{2\alpha-2}\}$$

$$(d) \quad \{(x, y, z) \in \Delta_{\alpha}^2 \mid y = \alpha x - \frac{1}{\alpha-1}\}$$

$$(e) \quad \{(x, y, z) \in \Delta_{\alpha}^2 \mid y = \frac{\alpha-2}{\alpha-1}\}$$

Beweis: Es ist $\|\phi\| = \alpha + (1-\alpha)y$ für $\phi \in \mathcal{M}_{\alpha}$, $w = \|\phi\| - \alpha\xi$.

Je nach Lage von $\xi = \xi(x, y, z)$ (d.h. je nach Lage von (x, y, z) in Δ_{α}^2) ergeben sich hieraus verschiedene Ausdrücke für w :

$$(x, y, z) \in A : w = (\alpha-1)(1-y)$$

$$(x, y, z) \in B : w = (\alpha-1)(\alpha x - y)$$

$$(x, y, z) \in C : w = (\alpha-1)(1-2y)$$

Der Rest ist elementares Ausrechnen. Wir zeigen nur noch, daß für $1 < \alpha \leq 2$ der Fall (3) (d.h. $w \geq 1$) nicht eintreten kann:

$$(x, y, z) \in A : w = (\alpha-1)(1-y) \leq 1-y \leq 1$$

$$(\alpha \leq 2) \quad (y \geq 0)$$

$$(x, y, z) \in B : w = (\alpha-1)(\alpha x - y) \leq \alpha x - y \leq 1-y \leq 1$$

$$(\alpha \leq 2) \quad (x \leq \frac{1}{\alpha}) \quad (y \geq 0)$$

$$(x, y, z) \in C : w = (\alpha-1)(1-2y) \leq 1-2y \leq 1$$

$$(\alpha \leq 2) \quad (y \geq 0)$$

Mit diesen Fallunterscheidungen ist das Simplex Δ_α^2 in maximal acht Teile unterteilt, die wir $A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ nennen. Dabei ist zum Beispiel $(x, y, z) \in B_1$, wenn (x, y, z) in B liegt und die Bedingung (1) (d.h. $w \leq 0$) erfüllt.

Der Übersichtlichkeit halber fassen wir hier noch einmal die Definition der Mengen $A_2, \dots, C_3$ zusammen:

$$A_2 = \{ (x, y, z) \in \Delta_\alpha^2 \mid 1 \leq \alpha x, \frac{\alpha-2}{\alpha-1} \leq y \leq 1 \}$$

$$A_3 = \{ (x, y, z) \in \Delta_\alpha^2 \mid 1 \leq \alpha x, 0 \leq y \leq \frac{\alpha-2}{\alpha-1} \}$$

$$B_1 = \{ (x, y, z) \in \Delta_\alpha^2 \mid \frac{1-y}{\alpha} \leq x \leq \frac{1}{\alpha}, \alpha x \leq y \}$$

$$B_2 = \{ (x, y, z) \in \Delta_\alpha^2 \mid \frac{1-y}{\alpha} \leq x \leq \frac{1}{\alpha}, \alpha x - \frac{1}{\alpha-1} \leq y \leq \alpha x \}$$

$$B_3 = \{ (x, y, z) \in \Delta_\alpha^2 \mid \frac{1-y}{\alpha} \leq x \leq \frac{1}{\alpha}, y \leq \alpha x - \frac{1}{\alpha-1} \}$$

$$C_1 = \{ (x, y, z) \in \Delta_\alpha^2 \mid x \leq \frac{1-y}{\alpha}, \frac{1}{2} \leq y \}$$

$$C_2 = \{ (x, y, z) \in \Delta_\alpha^2 \mid x \leq \frac{1-y}{\alpha}, \frac{\alpha-2}{2\alpha-2} \leq y \leq \frac{1}{2} \}$$

$$C_3 = \{ (x, y, z) \in \Delta_\alpha^2 \mid x \leq \frac{1-y}{\alpha}, y \leq \frac{\alpha-2}{2\alpha-2} \}$$

Nach diesen umfangreichen Vorbereitungen können wir die vom Verschiebeoperator S_α induzierte Abbildung $\mathfrak{S}_\alpha$ angeben:

4.8 SATZ Der Verschiebeoperator S_α zur Gleichung (4.2) mit der Nichtlinearität (4.3) induziert auf dem Simplex Δ_α^2 eine stetige, stückweise lineare Selbstabbildung $\mathfrak{S}_\alpha$, die gegeben ist durch:

$(x, y, z) \rightarrow$

$$\frac{\alpha-1}{\alpha} \begin{cases} (0, 0, \frac{\alpha}{\alpha-1}) & ; \alpha \leq 1 \\ (0, (\alpha-1)y+2-\alpha, \frac{\alpha}{\alpha-1} - ((\alpha-1)y+2-\alpha)) & ; \alpha > 1 ; \text{ auf A2} \\ (-\alpha x+y, \alpha x-y+1, \frac{1}{\alpha-1}) & ; " ; \text{ auf B1} \\ (0, \alpha(1-\alpha)x+(\alpha-1)y+1, \frac{\alpha}{\alpha-1} - (\alpha(1-\alpha)x+(\alpha-1)y+1)) & ; " ; \text{ auf B2} \\ (2y-1, -2y+2, \frac{1}{\alpha-1}) & ; " ; \text{ auf C1} \\ (0, 2(\alpha-1)y+2-\alpha, \frac{\alpha}{\alpha-1} - (2(\alpha-1)y+2-\alpha)) & ; " ; \text{ auf C2} \\ (0, 0, \frac{\alpha}{\alpha-1}) & ; " ; \text{ auf A3, B3, C3} \end{cases}$$

Beweis: Sei $h := \|\phi\| = (1-\alpha)y + \alpha$. Bezeichnen wir das Bild

$\mathcal{S}_\alpha(x, y, z)$ des Punktes $(x, y, z) \in \Delta_\alpha^2$ mit $(X, Y, Z) =$

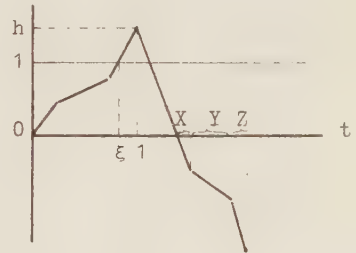
$(X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$, so ist

für $w \leq 0$:

$$X = 1 + \xi - \left(\frac{h}{\alpha} + 1 \right) = \xi - \frac{h}{\alpha}$$

$$Y = 1 + \frac{h-1}{\alpha} + 1 - (1 + \xi) = \frac{h}{\alpha} - \xi + \frac{\alpha-1}{\alpha}$$

$$Z = 1 - X - Y = \frac{1}{\alpha}$$

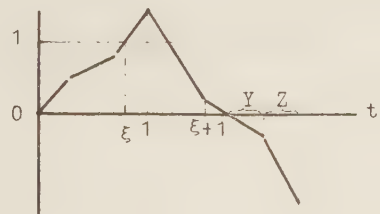


für $0 \leq w \leq 1$:

$$X = 0$$

$$Y = 1 + \frac{h-1}{\alpha} + 1 - (1 + \xi + w) = \frac{h}{\alpha} - \xi - w + \frac{\alpha-1}{\alpha}$$

$$Z = 1 - X - Y = \xi + w - \frac{h}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$$

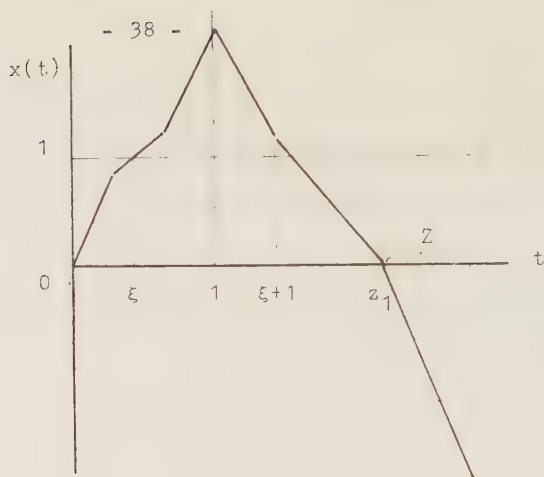


für $w \geq 1$:

$$X = 0$$

$$Y = 0$$

$$Z = 1$$



Einsetzen der verschiedenen Möglichkeiten für ξ ($(x,y,z) \in A, B$ oder C) liefert dann die vollständige Beschreibung. Offensichtlich ist $\mathcal{S}_\alpha$ stückweise linear. Die Stetigkeit auf den Rändern der Teilgebiete überprüft man in elementaren Rechnungen.

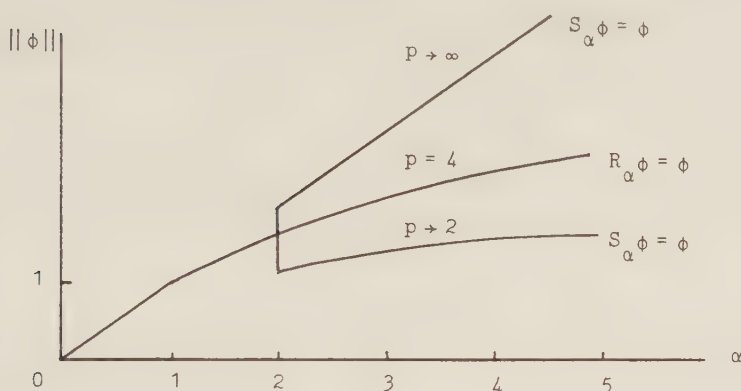
qed.

4.9 KOROLLAR Die Gleichung (4.2) mit der Nichtlinearität (4.3) hat

für $0 < \alpha < 2$ genau eine nichttriviale periodische Lösung vom S-Typ. Diese ist sogar vom R-Typ und stimmt mit der in Korollar 4.6 nachgewiesenen überein.

für $\alpha = 2$ unendlich viele nichttriviale periodische Lösungen vom S-Typ, die von den periodischen Lösungen vom R-Typ abzweigen.

für $\alpha > 2$ genau drei nichttriviale periodische Lösungen vom S-Typ. Eine dieser Lösungen ist vom R-Typ und stimmt mit der in Korollar 4.6 nachgewiesenen überein. Die Perioden der beiden anderen Lösungen streben mit wachsendem α gegen Unendlich bzw. gegen 2.



Beweis: Fixpunkte der Abbildung $\mathcal{S}_\alpha : \Delta_\alpha^2 + \Delta_\alpha^2$ entsprechen nichttrivialen Fixpunkten des Verschiebeoperators S_α , welche ihrerseits Anfangsfunktionen nichttrivialer periodischer Lösungen vom S-Typ sind. Wir berechnen also die Fixpunkte der in Satz 4.8 explizit berechneten Abbildung $\mathcal{S}_\alpha$.

(1) Für $\alpha \leq 1$ existiert offensichtlich nur der Fixpunkt $(0,0,1)$.

(2) Sei $\alpha > 1$.

a) In A_2 , B_2 und B_3 liegt kein Fixpunkt, da alle Punkte nach C abgebildet werden.

b) Für B_1 berechnen wir als Fixpunkt der (linearen) Abbildung $\mathcal{S}_\alpha|_{B_1}$ (auf die Ebene $\{(x,y,z) \mid x+y+z=1\} \approx \mathbb{R}^2$ linear fortgesetzt):

$$(x, y, z)_{B1} = \left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha}, \frac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha^2 + \alpha - 1}, \frac{1}{\alpha} \right)$$

Dieser Punkt liegt genau dann in $B1$, wenn $\alpha \geq 2 + \sqrt{2}$.

c) In $C1$ berechnen wir als Fixpunkt der auf die Ebene $\{(x, y, z) \mid x+y+z=1\}$ linear fortgesetzten Abbildung $\mathfrak{S}_\alpha|_{C1}$:

$$(x, y, z)_{C1} = \left(\frac{\alpha^2 - 3\alpha + 2}{3\alpha^2 - 2\alpha}, \frac{2\alpha - 2}{3\alpha - 2}, \frac{1}{\alpha} \right)$$

Dieser Punkt liegt genau dann in $C1$, wenn $\alpha \leq 2 + \sqrt{2}$.

In $\alpha = 2 + \sqrt{2}$ geht der $C1$ -Fixpunkt stetig in den $B1$ -Fixpunkt über.

d) In $C2$ lautet die Fixpunktgleichung:

$$(x, y, z) = \frac{!}{\alpha} (0, 2(\alpha-1)y + 2 - \alpha, \frac{\alpha}{\alpha-1} - (2(\alpha-1)y + 2 - \alpha))$$

Für $\alpha = 2$ ist jeder Punkt $(0, y, 1-y)$ Lösung dieser Gleichung.

In $C2$ liegt dieser Punkt aber nur dann, wenn $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$

(Definition von $C2$!).

Für $\alpha \neq 2$ erhält man den Fixpunkt

$$(x, y, z)_{C2} = \left(0, \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}, \frac{\alpha}{2\alpha-1} \right)$$

Dieser Punkt liegt für alle $\alpha > 1$ in $C2$.

e) In $C3$ kommt schließlich für $\alpha > 2$ noch der Fixpunkt

$$(x, y, z)_{C3} = (0, 0, 1)$$

hinzu.

Zusammenfassend erhalten wir also die folgenden Fixpunkte:

$0 < \alpha < 1$: ein Fixpunkt $(x, y, z) = (0, 0, 1)$

$1 < \alpha < 2$: ein Fixpunkt $(x, y, z)_{C_2} = (0, \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}, \frac{\alpha}{2\alpha-1})$

$\alpha = 2$: Kontinuum von Fixpunkten

$$(x, y, z) = (0, y, 1-y) \quad ; \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$$

$\alpha > 2$: drei Fixpunkte $(x, y, z)_{C_2} = (0, \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}, \frac{\alpha}{2\alpha-1})$

$$(x, y, z)_{C_3} = (0, 0, 1)$$

$$(x, y, z)_{C_1/B_1} = \begin{cases} (\frac{\alpha^2-3\alpha+2}{3\alpha^2-2\alpha}, \frac{2\alpha-2}{3\alpha-2}, \frac{1}{\alpha}) & ; \alpha \leq 2+\sqrt{2} \\ (\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha-1}, \frac{\alpha^2-\alpha}{\alpha^2+\alpha-1}, \frac{1}{\alpha}) & ; \alpha \geq 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

Als Periode der zugehörigen periodischen Lösung vom S-Typ berechnet man:

$$(x, y, z)_{C_3} : p = p(\alpha) = 2(\alpha + \frac{1}{\alpha})$$

$$(x, y, z)_{C_2} : p = p(\alpha) = 4$$

$$(x, y, z)_{C_1/B_1} : p = p(\alpha) = \begin{cases} \frac{8\alpha^2-4}{3\alpha^2-2\alpha} & ; \alpha \leq 2+\sqrt{2} \\ 2 \frac{\alpha^2+4\alpha-3}{\alpha^2+\alpha-1} & ; \alpha \geq 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

qed.

4.10 BEMERKUNGEN

(1) Im Verzweigungspunkt $\alpha = 2$ tritt keine Periodenverdopplung ein, sondern die Periode der periodischen Lösung vom S-Typ verändert sich stetig längs des Lösungszweiges.

(2) Man überlegt sich leicht, daß die Gleichung $x'(t) = -f(x(t-1))$ (wo f die Bedingung (1.2) erfüllt) keine langsam schwingenden periodischen Lösungen der Periode 2 haben kann. Die Modellgleichung zeigt, daß asymptotisch die Periode 2 auftreten kann. Die Frage, ob ganzzahlige Vielfache des Delays als Periode einer periodischen Lösung auftreten können, wird unter anderem in /4/ und /7/ behandelt.

#

(c) Fixpunktindex der Lösungen

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir für Gleichung (4.2) mit Nichtlinearität (4.3) durch explizites Berechnen der Fixpunkte der Abbildung S_α eine Verzweigung nachgewiesen. In diesem Abschnitt zeigen wir, daß der Grund für das Abzweigen neuer periodischer Lösungen in $\alpha = 2$ darin liegt, daß die Fixpunkte von R_α (die ja auch Fixpunkte von S_α sind) in $\alpha = 2$ bezüglich S_α ihren Index wechseln. Zur Berechnung des Index benutzen wir eine Methode, die auf dem SPERNERSchen Lemma und einem Lemma von KNASTER-KURATOWSKI-MAZURKIEWICZ ("KKM-Lemma") beruht /34/. Wir referieren in Kürze die wichtigsten Begriffsbildungen.

Im Unterschied zu unserer Notation wird in /34/ die Menge

$$\Sigma^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq 1, x_i \geq 0\}$$

als Standard-n-Simplex definiert. Wir folgen in diesem Abschnitt dieser Bezeichnungsweise, da Σ^n zu Δ^n homöomorph ist ($h: \Delta^n \rightarrow \Sigma^n$ sei definiert durch $h(x_1, \dots, x_{n+1}) := (x_1, \dots, x_n)$;

$h^{-1} : \Sigma^n \rightarrow \Delta^n$ sei definiert durch $h^{-1}(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_n, 1 - \sum_{i=1}^n x_i)$. Eine Abbildung $\gamma : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ induziert in kanonischer Weise eine Abbildung $f : \Sigma^n \rightarrow \Sigma^n$, die aus γ durch "Weglassen der letzten Koordinate" hervorgeht. Im konkreten Fall der Abbildung $\gamma_\alpha : \Delta_\alpha^2 \rightarrow \Delta_\alpha^2$ werden wir auch die induzierte Abbildung wieder mit γ_α bezeichnen.

4.11 DEFINITION Es sei

$$\begin{aligned} f : \Sigma^n &\rightarrow \Sigma^n \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{aligned}$$

eine stetige Selbstabbildung des Standard-n-Simplex Σ^n . Eine Bewertung ℓ^f ist eine Abbildung

$$\ell^f : \Sigma^n \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

die folgendermaßen definiert ist:

Sei

$$L_i^f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ wenn } x_i = 0 \\ 1 & , \text{ wenn } f_i(x) > x_i \\ 0 & , \text{ wenn } f_i(x) \leq x_i \end{cases}$$

ℓ^f ist dann die Anzahl der führenden Einsen des Vektors $L^f(x) = (L_1^f(x), \dots, L_n^f(x))$.

††

Die Bewertungsmengen A_i^f sind definiert durch

$$A_i^f := \text{cl } \{x \in \Sigma^n \mid \ell^f(x) = i\}$$

Liegt ein $x \in \Sigma^n$ im Durchschnitt aller Bewertungsmengen, d.h.

$x \in \bigcap_{i=1}^n A_i^f$, so gilt: $f_i(x) \geq x_i$ und $f_i(x) \leq x_i$ für alle

$i \in \{1, \dots, n\}$ und damit $f_i(x) = x_i$. Das heißt: x ist ein Fixpunkt von f .

Es gilt also:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i^f \subset \text{Fix}(f) := \{x \in \Sigma^n \mid f(x) = x\}$$

Umgekehrt muß aber nicht jeder Fixpunkt im Durchschnitt der A_i^f liegen (vgl. /34/).

Ist das Standard- n -Simplex Σ^n durch kleinere n -Simplizes $(\sigma_i^n)_{1 \leq i \leq K}$ "trianguliert", so heißt ein Teilsimplex σ_k^n

"vollständig bewertet" oder "SPERNER-Simplex", wenn seine $n+1$ Ecken alle Bewertungen von 0 bis n tragen.

Ein vollständig bewertetes Simplex σ_k^n heißt "positiv orientiert" ($\text{or}(\sigma_k^n) = +1$), wenn seine Ecken durch einen orientierungserhaltenden (affin linearen) Homöomorphismus in die Ecken des (a priori vollständig bewerteten) Simplex Σ^n entsprechend ihrer Bewertung abgebildet werden, andernfalls "negativ orientiert" ($\text{or}(\sigma_k^n) = -1$).

4.12 SATZ (PRÜFER /34/) : Sei $f : \Sigma^n \rightarrow \Sigma^n$ stetig,

$U \subset \Sigma^n$ eine offene Menge, so daß $\bar{U}$ triangulierbar ist.
Es sei $\partial U \cap \text{Fix}(f) = \emptyset$.

Dann gilt:

(1) Die Mengen $\partial U \setminus A_i^f$, $i = 0, \dots, n$, bilden eine offene Überdeckung U für ∂U .

(2) Sei $\lambda > 0$ eine Lebesguesche Zahl von U und sei τ eine Triangulierung von $\bar{U}$, so daß für alle $(n-1)$ -Simplizes $\sigma^{n-1} \in \tau$, $\sigma^{n-1} \subset \partial U$ gilt: $\text{diam } \sigma^{n-1} \leq \lambda$.

Dann ist

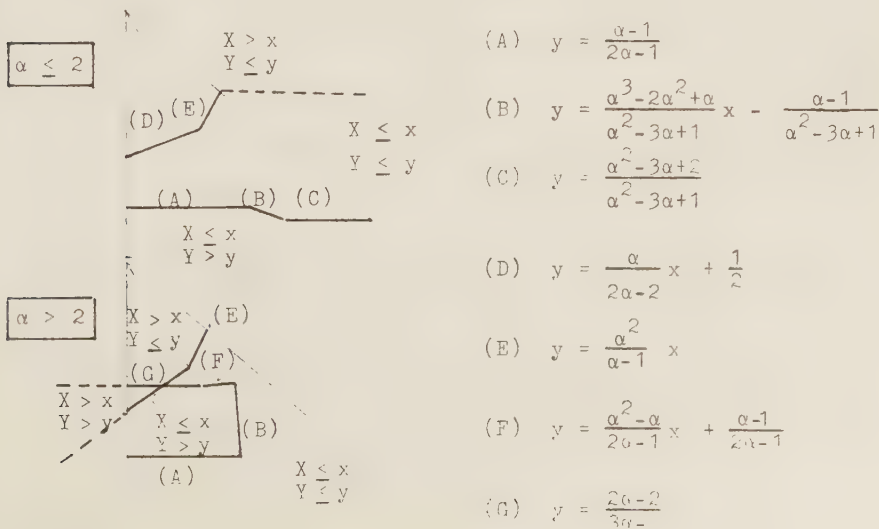
$$i(f, U, \Sigma^n) = \sum_{\sigma^n \in \tau} \text{or}(\sigma^n)$$

σ^n vollst. bew.

Beweis: /34/

Um Satz 4.12 auf die konkrete Situation der Abbildung $\gamma_\alpha : \Delta_\alpha^2 \rightarrow \Delta_\alpha^2$ anzuwenden, identifizieren wir Δ_α^2 mit Σ^2 , bezeichnen die induzierte Abbildung der Einfachheit halber aber wieder mit γ_α . Bezeichnen wir mit $(X(x, y), Y(x, y)) \in \Sigma^2$ das Bild des Punktes $(x, y) \in \Sigma^2$ unter γ_α , so ist zu berechnen, wo $X > x$ bzw. $X \leq x$ und $Y > y$ bzw. $Y \leq y$ ist. Zusammen mit der Sonderrolle von $x = 0$ und $y = 0$ induziert das dann eine Bewertung ℓ^α auf dem Simplex Σ^2 .

4.13 LEMMA Das Verhalten der Abbildung $\gamma_\alpha : \Sigma^2 \rightarrow \Sigma^2$ wird durch die folgenden Diagramme beschrieben:



Beweis: Elementare Rechnung

qed.

4.14 SATZ Sei $U' \subset \Sigma^2$ eine Umgebung des Fixpunktes $(x, y) = (0, \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}) \in \Sigma^2$ der Abbildung $\tilde{S}_\alpha$ mit $\partial U \cap \text{Fix}(\tilde{S}_\alpha) = \emptyset$.

Dann gilt:

$$i(\tilde{S}_\alpha, U, \Sigma^2) = \begin{cases} +1 & \text{für } \alpha < 2 \\ -1 & \text{für } \alpha > 2 \end{cases}$$

Beweis: Die in Lemma 4.13 beschriebenen Eigenschaften der Abbildung $\tilde{S}_\alpha$ induzieren gemäß Definition 4.11 folgende Bewertungen (beachte die Bewertung für $x = 0$!):



Für $\alpha < 2$ liegt genau ein Punkt (nämlich $(0, \frac{\alpha-1}{2\alpha-1})$) im Durchschnitt der Mengen A_0, A_1, A_2 . Bei hinreichend feiner Triangulierung wird er durch genau ein vollständig bewertetes Simplex approximiert, das positiv orientiert ist. Der (lokale) Fixpunktindex ist damit gemäß Satz 4.12 $+1$.

Für $\alpha > 2$ liegen genau drei Punkte im Durchschnitt der Mengen A_0, A_1, A_2 . Wählen wir die Triangulierung so fein, daß jeder dieser Fixpunkte durch genau ein vollständig bewertetes Simplex approximiert wird, so ist das Sperner-Simplex, das den Fixpunkt $(0, \frac{\alpha-1}{2\alpha-1})$ approximiert, negativ orientiert, die beiden anderen sind positiv orientiert. Die Behauptung ergibt sich damit wieder aus Satz 4.12.

qed.

4.15 BEMERKUNG Die vorliegende Berechnung des Fixpunktindex war motiviert durch die Tatsache, daß $\tilde{S}_\alpha$ eine Simplex-Abbildung ist. Hier erschien eine Berechnung des Fixpunktindex mit Satz 4.12 naheliegend. Im Nachhinein erscheint diese Art der Indexberechnung unnötig aufwendig. Eleganter ist eine Indexberechnung mit Hilfe des Satzes von LERAY-SCHAUDER (Satz 1.9, vgl. / 1 /). Mit diesem Hilfsmittel werden wir später beim allgemeinen Zweiparameter-Problem den Fixpunktindex berechnen. Die einzelnen Schritte sind dann:

- 1) Berechnung der $\tilde{R}_\alpha$ -Fixpunkte (einfacher als Berechnung der $\tilde{S}_\alpha$ -Fixpunkte ; vgl. Satz 4.5)
- 2) Interpretation der $\tilde{R}_\alpha$ -Fixpunkte als $\tilde{S}_\alpha$ -Fixpunkte ; Berechnung der Abbildung $\tilde{S}_\alpha$ in der Nähe der $\tilde{R}_\alpha$ -Fixpunkte (keine globale Berechnung von $\tilde{S}_\alpha$ wie in Satz 4.8)
- 3) Berechnung des Fixpunktindex des $\tilde{R}_\alpha$ -Fixpunktes bezüglich der Abbildung $\tilde{S}_\alpha$ mit Hilfe des Satzes von LERAY-SCHAUDER

Dies wird dann ausreichen, vermöge eines Indexwechsels auf Verzweigung von $\tilde{S}_\alpha$ -Fixpunkten von $\tilde{R}_\alpha$ -Fixpunkten zu schließen, allerdings nicht, um Aussagen über asymptotisches Amplituden- oder Periodenverhalten der abzweigenden Lösungen zu machen.

§ 5 Chaotisches Verhalten einer Modell-Gleichung

Die in Satz 4.8 berechnete stückweis lineare Abbildung $\mathcal{S}_\alpha : \Delta_\alpha^2 \rightarrow \Delta_\alpha^2$ ist tatsächlich eine eindimensionale Abbildung, die für $\alpha > \alpha^* \approx 2.884$ einen Punkt der Periode 3 hat und damit die Voraussetzungen des Satzes 2.1 erfüllt.

VEREINBARUNG : Der Begriff "Periode" tritt im folgenden in zweifacher Bedeutung auf. Ein Punkt der Periode k ist ein Fixpunkt der Abbildung $\mathcal{S}_\alpha^k$. Diesem Fixpunkt von $\mathcal{S}_\alpha^k$ entspricht aufgrund der Definition des Verschiebeoperators S_α eine periodische Lösung vom S^k -Typ $x(t)$ mit $x(t+p) = x(t)$. Die Periode p dieser periodischen Lösung steht aber in keiner direkten Beziehung zur Periode k des periodischen Punktes.

Zur Verdeutlichung wollen wir im Zusammenhang mit periodischen Lösungen der Gleichung (4.2) von der t-Periode einer Lösung x sprechen.

Ein Punkt der Periode 3 (d.h. ein Fixpunkt von $\mathcal{S}_\alpha^3$) wird im allgemeinen nicht zu einer periodischen Lösung der t-Periode 3 führen.

Da für $\alpha < 1$ die periodischen Lösungen vom S-Typ eindeutig sind, die Behandlung dieses Falles nur weitere Fallunterscheidungen bei der Formulierung der Resultate nötig macht (vgl. Satz 4.8), setzen wir ab sofort $\alpha \geq 1$ voraus.

5.1 LEMMA Es sei $\alpha > 1$ und $(X, Y, Z) \in \mathcal{S}_\alpha(\Delta_\alpha^2)$.

Dann gilt:

entweder $X \leq 0$ und $0 \leq Y \leq \frac{\alpha-1}{\alpha}$

oder $z \equiv \frac{1}{\alpha}$ und $0 \leq y \leq \frac{y-1}{\alpha}$

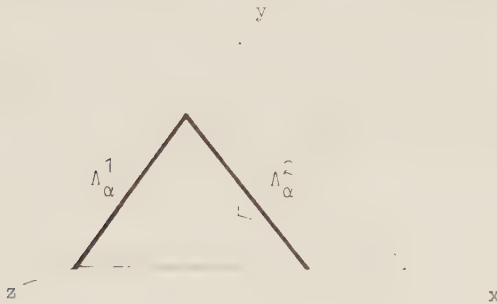
Das heißt:

$$\mathcal{S}_\alpha(\Delta_\alpha^2) \subset \Lambda_\alpha := \Lambda_\alpha^1 \cup \Lambda_\alpha^2$$

mit

$$\Lambda_\alpha^1 = \{(0, y, z) \mid y+z=1, 0 \leq y \leq \frac{\alpha-1}{\alpha}, z \geq 0\}$$

$$\Lambda_\alpha^2 = \{(x, y, \frac{1}{\alpha}) \mid x+y = \frac{\alpha-1}{\alpha}; x, y \geq 0\}$$



Beweis:

(1) $(x, y, z) \in A3 \cup B3 \cup C3$. Dann ist $\mathcal{S}_\alpha(x, y, z) = (0, 0, 1) \in \Lambda_\alpha^1$.

(2) $(x, y, z) \in A2 \cup B2 \cup C2$. Die erste Koordinate des Bildvektors ist 0, wie man unmittelbar aus der Abbildung $\mathcal{S}_\alpha$ (Satz 4.8) abliest. Man sieht ebenso leicht, daß wegen $0 \leq x, y, z \leq 1$ die zweite Koordinate kleiner oder gleich $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ ist.

(3) $(x, y, z) \in B1 \cup C1$. Addition der ersten und zweiten Koordinate des Bildvektors liefert die Behauptung.

qed.

Wir identifizieren die eindimensionale Menge Λ_α folgendermaßen mit dem Intervall $I_\alpha := [0, 2\frac{\alpha-1}{\alpha}]$:

Es sei T_α die Abbildung

$$T_\alpha : \begin{array}{l} \Lambda_\alpha \rightarrow I_\alpha \\ (x, y, z) \rightarrow \begin{cases} y & , \text{ falls } (x, y, z) \in \Lambda_\alpha^1 \\ 2\frac{\alpha-1}{\alpha} - y & , \text{ falls } (x, y, z) \in \Lambda_\alpha^2 \end{cases} \end{array}$$

mit der Umkehrabbildung

$$T_\alpha^{-1} : \begin{array}{l} I_\alpha \rightarrow \Lambda_\alpha \\ y \rightarrow \begin{cases} (0, y, 1-y) & , \text{ falls } 0 \leq y \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ (y - \frac{\alpha-1}{\alpha}, 2\frac{\alpha-1}{\alpha} - y, \frac{1}{\alpha}) & , \text{ falls } \frac{\alpha-1}{\alpha} \leq y \leq 2\frac{\alpha-1}{\alpha} \end{cases} \end{array}$$

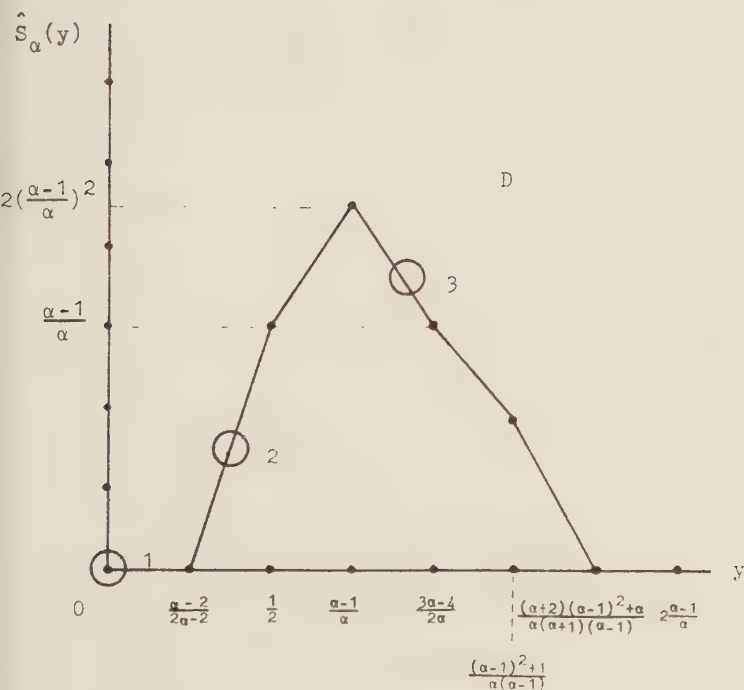
Damit ergibt sich als Realisierung des Verschiebeoperators S_α auf dem Intervall I_α die Abbildung

$$\begin{array}{l} \hat{S}_\alpha : I_\alpha \rightarrow I_\alpha \\ y \rightarrow T_\alpha \hat{S}_\alpha T_\alpha^{-1}(y) \end{array}$$

Explizit ist die Abbildung $\hat{S}_\alpha : I_\alpha \rightarrow I_\alpha$ gegeben durch :

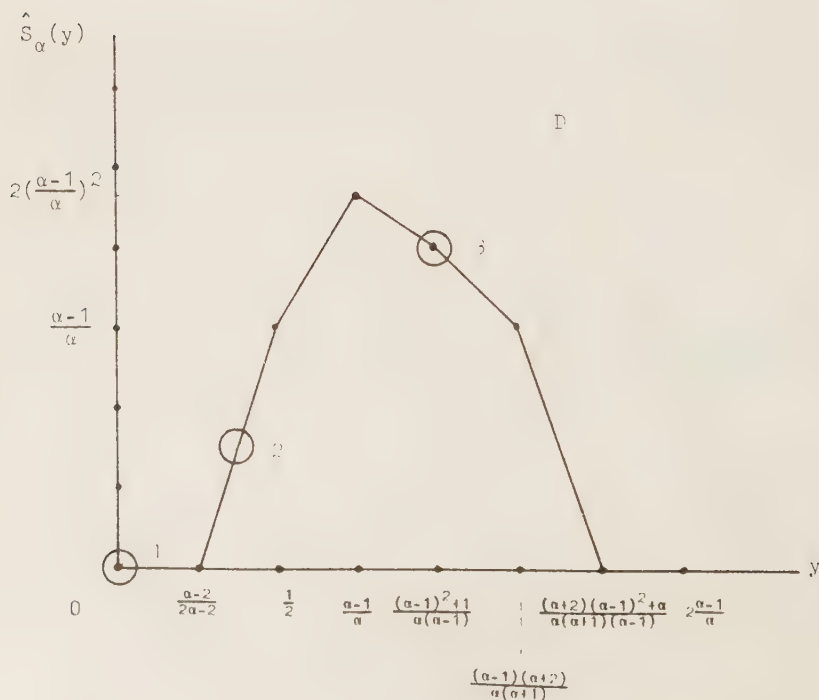
$$\boxed{2 \leq \alpha \leq 3} : \hat{S}_\alpha(y) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ; \quad 0 \leq y \leq \frac{\alpha-2}{2\alpha-2} \\ \frac{2(\alpha-1)^2}{\alpha} y - \frac{(\alpha-2)(\alpha-1)}{\alpha} & ; \quad \frac{\alpha-2}{2\alpha-2} \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 2\frac{\alpha-1}{\alpha} y & ; \quad \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ -2\frac{\alpha-1}{\alpha} (y - 2\frac{\alpha-1}{\alpha}) & ; \quad \frac{\alpha-1}{\alpha} \leq y \leq \frac{3\alpha-4}{2\alpha} \\ \frac{\alpha-1}{\alpha} (-2(\alpha-1)y + 4\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} + 2 - \alpha) & ; \quad \frac{3\alpha-4}{2\alpha} \leq y \leq \frac{(\alpha-1)^2+1}{\alpha(\alpha-1)} \\ \frac{\alpha-1}{\alpha} ((1-\alpha^2)y + \alpha^2 - 2 + \frac{2}{\alpha}) & ; \quad \frac{(\alpha-1)^2+1}{\alpha(\alpha-1)} \leq y \leq \frac{(\alpha+2)(\alpha-1)^2+\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)} \\ 0 & ; \quad \frac{(\alpha+2)(\alpha-1)^2+\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)} \leq y \leq 2\frac{\alpha-1}{\alpha} \end{array} \right.$$



$$\boxed{\alpha \geq 3} : \hat{S}_\alpha(y) =$$

$$= \begin{cases} 0 & ; & 0 \leq y \leq \frac{\alpha-2}{2\alpha-2} \\ 2 \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} y - \frac{(\alpha-2)(\alpha-1)}{\alpha} & ; & \frac{\alpha-2}{2\alpha-2} \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 2 \frac{\alpha-1}{\alpha} y & ; & \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ -2 \frac{\alpha-1}{\alpha} (y - 2 \frac{\alpha-1}{\alpha}) & ; & \frac{\alpha-1}{\alpha} \leq y \leq \frac{(\alpha-1)^2+1}{\alpha(\alpha-1)} \\ -\frac{\alpha^2-1}{\alpha} y + \alpha-1+2(\frac{\alpha-1}{\alpha})^2 & ; & \frac{(\alpha-1)^2+1}{\alpha(\alpha-1)} \leq y \leq \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} \\ \frac{\alpha-1}{\alpha} ((1-\alpha^2)y + \alpha^2 - 2\frac{2}{\alpha}) & ; & \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} \leq y \leq \frac{(\alpha+2)(\alpha-1)^2+\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)} \\ 0 & ; & \frac{(\alpha+2)(\alpha-1)^2+\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)} \leq y \leq 2\frac{\alpha-1}{\alpha} \end{cases}$$



In der eindimensionalen Abbildung $\hat{S}_\alpha$ findet man unmittelbar die bereits in Korollar 4.9 für die Abbildung $\hat{S}_\alpha$ nachgewiesenen Fixpunkte wieder, die periodischen Lösungen vom S-Typ der Differentialgleichung (4.2) entsprechen :

- den Fixpunkt (1) , korrespondierend zur periodischen Lösung vom S-Typ, deren t-Periode gegen Unendlich strebt (für wachsendes α)
- den Fixpunkt (2) , korrespondierend zur periodischen Lösung vom R-Typ (mit konstanter t-Periode 4)
- den Fixpunkt (3) , korrespondierend zur periodischen Lösung vom S-Typ, deren t-Periode mit wachsendem α gegen 2 strebt .

Ebenso liest man an der eindimensionalen Abbildung $\hat{S}_\alpha$ sofort die Fixpunktindizes ab.

- 5.2 SATZ Für $\alpha > \alpha^* \approx 2.884$ hat $\hat{S}_\alpha : I_\alpha \rightarrow I_\alpha$ einen Punkt der Periode 3.
- Damit gelten für $\hat{S}_\alpha$ alle Aussagen des Satzes (2.1):
- (1) Es existieren Fixpunkte für alle Iterierten $\hat{S}_\alpha^j, j \in \mathbb{N}$.
 - (2) Es existiert eine überabzählbare Menge $S \subset I_\alpha$, die keine periodischen Punkte enthält und so daß gilt:

(a)	$\liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{S}_\alpha^n(x) - \hat{S}_\alpha^n(y) = 0$	$\forall x, y \in S, x \neq y$
	$\limsup_{n \rightarrow \infty} \hat{S}_\alpha^n(x) - \hat{S}_\alpha^n(y) > 0$	$\forall x, y \in S, x \neq y$
(b)	$\limsup_{n \rightarrow \infty} \hat{S}_\alpha^n(x) - \hat{S}_\alpha^n(p) > 0$	$\forall x \in S, p \text{ per. Pkt.}$

Beweis: Wir geben ein Intervall $[\bar{y}, \bar{z}] = [\bar{y}(\alpha), \bar{z}(\alpha)]$ an derart, daß für $\alpha > \alpha^*$

$$\hat{S}_\alpha^3(\bar{y}) \geq \bar{z} > \bar{y} \quad \text{und} \quad \hat{S}_\alpha^3(\bar{z}) \leq \bar{z}$$

Nach dem Zwischenwertsatz hat dann die Abbildung $\hat{S}_\alpha^3 - \text{id}$ eine Nullstelle, die Abbildung $\hat{S}_\alpha^3$ damit einen Fixpunkt in $[\bar{y}, \bar{z}]$.

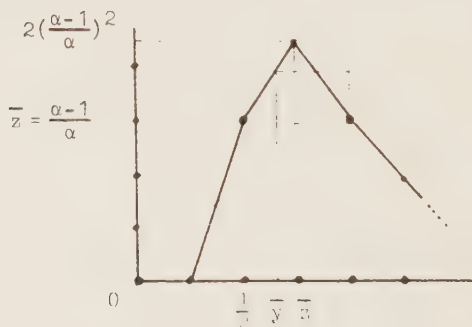
Sei

$$\bar{y}(\alpha) := \begin{cases} \frac{3\alpha-4}{4\alpha-4} & ; 2 \leq \alpha \leq 3 \\ \frac{\alpha+2}{2\alpha+2} & ; 3 \leq \alpha \end{cases} \quad ; \quad \bar{z}(\alpha) := \frac{\alpha-1}{\alpha}$$

Man sieht leicht, daß $\frac{1}{2} \leq \bar{y}(\alpha) \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} = \bar{z}(\alpha)$.

$\bar{y}(\alpha)$ ist gerade so gewählt, daß $\hat{S}_\alpha^2(\bar{y}(\alpha)) = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ und damit

$$\hat{S}_\alpha^3(\bar{y}(\alpha)) = \hat{S}_\alpha\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = 2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 \geq \frac{\alpha-1}{\alpha} \quad (\text{für } \alpha \geq 2).$$



Wir zeigen nun, daß für $\alpha > \alpha^* \approx 2.884$ gilt:

$$\hat{S}_\alpha^3\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \leq \frac{\alpha-1}{\alpha}$$

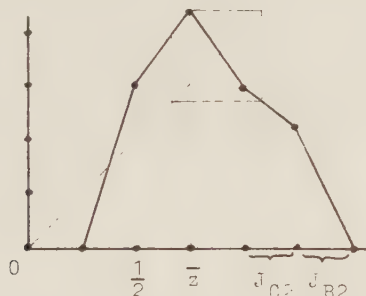
Um $\hat{S}_\alpha^3\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)$ berechnen zu können, sind wieder einige Fallunterscheidungen erforderlich:

1. Fall : $2 \leq \alpha \leq \tilde{\alpha}$, wo $\tilde{\alpha}$ die (eindeutige) reelle Wurzel von $\alpha^3 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 2 = 0$ ist.

Dann ist $\hat{S}_\alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha}) \in [\frac{3\alpha-4}{2\alpha}, \frac{(\alpha-1)^2+1}{\alpha(\alpha-1)}] =: J_{C2}$.

Durch weiteres Rechnen folgt : $\hat{S}_\alpha^2(\frac{\alpha-1}{\alpha}) \in [\frac{1}{2}, \frac{\alpha-1}{\alpha}]$ und daher

$$\hat{S}_\alpha^3(\frac{\alpha-1}{\alpha}) \geq \hat{S}_\alpha(\frac{1}{2}) = \frac{\alpha-1}{\alpha} :$$



2. Fall : $\tilde{\alpha} \leq \alpha \leq 3$

Dann ist $\hat{S}_\alpha(\frac{\alpha-1}{\alpha}) \in [\frac{(\alpha-1)^2+1}{\alpha(\alpha-1)}, \frac{(\alpha+2)(\alpha-1)^2+\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)}] =: J_{B2}$.

Hieraus folgt:

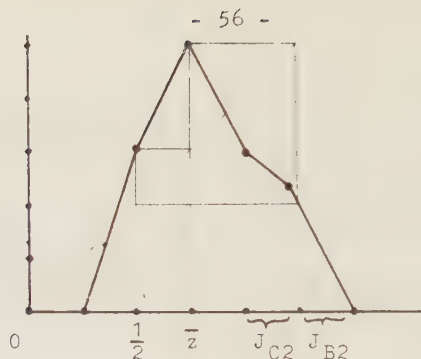
$$\hat{S}_\alpha^2(\frac{\alpha-1}{\alpha}) = \frac{\alpha-1}{\alpha} (-(\alpha^2-1) \cdot 2(\frac{\alpha-1}{\alpha})^2 + \alpha^2 - 2 + \frac{2}{\alpha})$$

Wir suchen nach Werten α , so daß $\hat{S}_\alpha^2(\frac{\alpha-1}{\alpha}) \leq \frac{1}{2}$. Denn daraus folgt: $\hat{S}_\alpha^3(\frac{\alpha-1}{\alpha}) \leq \hat{S}_\alpha(\frac{1}{2}) = \frac{\alpha-1}{\alpha}$.

Nun ist $\hat{S}_\alpha^2(\frac{\alpha-1}{\alpha}) \leq \frac{1}{2}$ genau dann, wenn

$$\frac{\alpha-1}{\alpha} (-(\alpha^2-1) \cdot 2(\frac{\alpha-1}{\alpha})^2 + \alpha^2 - 2 + \frac{2}{\alpha}) \leq \frac{1}{2}$$

Dies ist erfüllt, wenn $\alpha > \alpha^* \approx 2.884$, wo α^* größte positive Wurzel der Gleichung $2\alpha^5 - 10\alpha^4 + 13\alpha^3 - 8\alpha + 4 = 0$ ist.

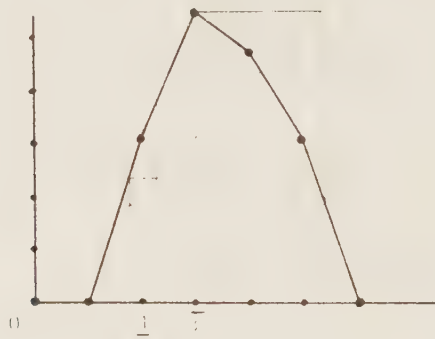


3. Fall : $\alpha \geq 3$

Dann ist $\hat{S}_\alpha\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \in \left[\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)}, 2\frac{\alpha-1}{\alpha}\right]$. Man überprüft,

daß in diesem Fall stets $\hat{S}_\alpha^2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \leq \frac{1}{2}$ und damit

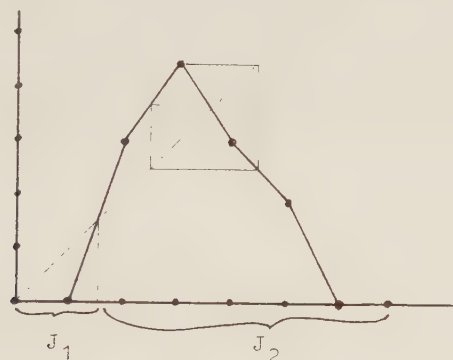
$\hat{S}_\alpha^3\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \leq \frac{\alpha-1}{\alpha}$ ist.



Q. 3.

Teilen wir das Intervall $I_\alpha = [0, 2\frac{\alpha-1}{\alpha}]$ auf in die beiden Teilintervalle $J_1 = (0, \frac{\alpha-1}{2\alpha-1})$ und $J_2 = (\frac{\alpha-1}{2\alpha-1}, 2\frac{\alpha-1}{\alpha})$ (wobei $\bar{x} = \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}$ der zur periodischen Lösung vom R-Typ gehörende Fixpunkt der Abbildung $\hat{S}_\alpha$ ist), so liegt im Intervall J_1

offensichtlich kein periodischer Punkt der Abbildung $\hat{S}_\alpha$. Alle Anfangswerte aus J_1 werden unter Iteration der Abbildung $\hat{S}_\alpha$ auf den (stabilen) Fixpunkt 0 abgebildet. Die aufgrund von Satz 5.2 für $\alpha > \alpha^*$ existierenden periodischen Punkte müssen folglich alle im Intervall J_2 enthalten sein, präziser: in einem Teilintervall von J_2 , da ja auch Punkte aus J_2 unter $\hat{S}_\alpha$ nach J_1 abgebildet werden.



5.3 SATZ Es sei $2 < \alpha < \bar{\alpha} \approx 2.976$. Dann ist das Intervall

$$J_\alpha := \left[\frac{\alpha-1}{2\alpha-1}, \hat{S}_\alpha\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \right] = \left[\frac{\alpha-1}{2\alpha-1}, 2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 \right]$$

invariant unter $\hat{S}_\alpha$.

Beweis: Da die Abbildung $\hat{S}_\alpha$ im Punkt $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ ihr Maximum annimmt, für alle $x \in J_\alpha$ also gilt: $\hat{S}_\alpha(x) \leq \hat{S}_\alpha\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)$, ist nur zu zeigen, daß

$$\hat{S}_\alpha\left(\hat{S}_\alpha\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\right) \geq \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}$$

für $\alpha \leq \bar{\alpha}$.

Aus dem Beweis von Satz 5.2 wissen wir bereits, daß für $\alpha < \bar{\alpha}$

$$\hat{S}_\alpha^2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \geq \frac{1}{2} \geq \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}$$

Für $\alpha > \tilde{\alpha}$ ist

$$\hat{S}_\alpha^2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot (- (\alpha^2-1) \cdot 2 \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 + \alpha^2 - 2 + \frac{2}{\alpha})$$

Die Bestimmungsgleichung $\hat{S}_\alpha^2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \geq \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}$ führt zu der Bedingung

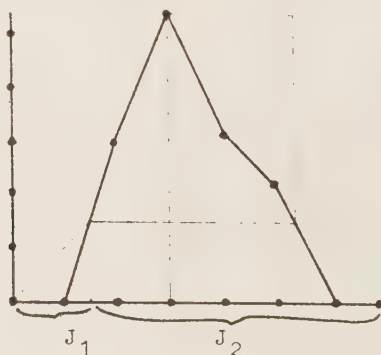
$$-2\alpha^5 + 9\alpha^4 - 9\alpha^3 - 2\alpha^2 + 6\alpha - 2 =: q(\alpha) \geq 0$$

Für $\tilde{\alpha} < \alpha < \bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha} \approx 2.976$ größte reelle Wurzel des Polynoms $q(\alpha)$) ist diese Ungleichung erfüllt.

ged.

Für $\alpha \in (2, 2.976)$ liefert also jeder Startwert $x \in J_\alpha$ eine Folge $\{x, \hat{S}_\alpha x, \hat{S}_\alpha^2 x, \dots\} \subset J_\alpha$. Insbesondere liegen auch alle (nach Satz 5.2 existierenden) periodischen Punkte und die Menge S der asymptotisch nicht periodischen Punkte in J_α . Da für $\alpha > 2$ der Anstieg der Abbildung $\hat{S}_\alpha|_{J_\alpha}$ betragsmäßig überall größer als 1 ist, sind alle periodischen Punkte instabil.

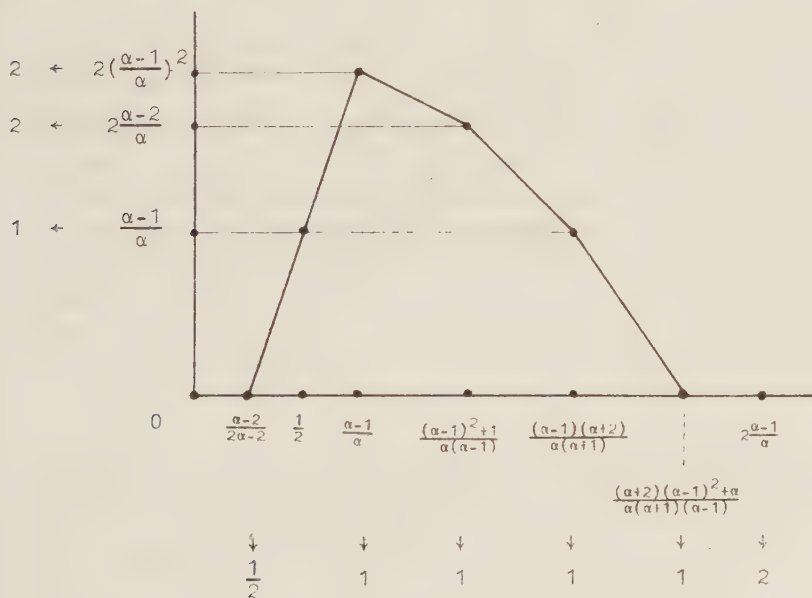
Was passiert nun, falls α größer wird als $\bar{\alpha} \approx 2.976$?



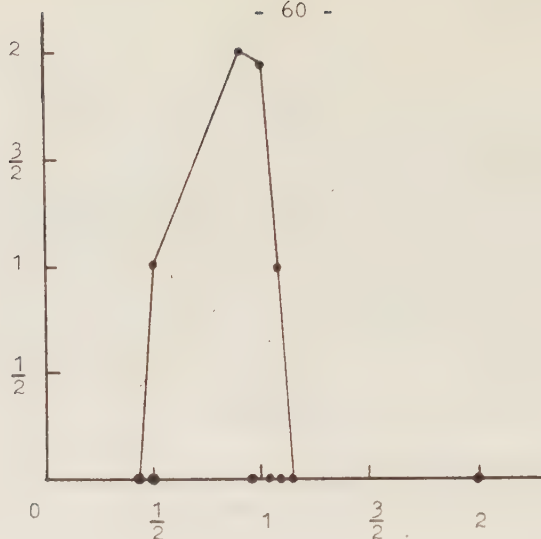
Es gibt dann offenbar Punkte x in einer Umgebung U_α des Punktes $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ ("Spitze"), die unter $\hat{S}_\alpha$ nach J_1 , also in den Einzugsbereich der 0, abgebildet werden. Periodische und aperiodische Punkte, die ja nach Satz 5.2 weiterhin existieren, müssen damit in $J_\alpha \setminus U_\alpha$ liegen.

Wächst α weiter, so wird die Menge $U_\alpha = \hat{S}_\alpha^{-1}(J_1) \subset J_\alpha$ größer, die periodischen und aperiodischen Punkte damit in die kleiner werdende Menge $J_\alpha \setminus U_\alpha$ "verdrängt".

Sehen wir uns die Abbildung $\hat{S}_\alpha$ noch einmal genauer auf ihr asymptotisches Verhalten für $\alpha \rightarrow \infty$ hin an:



Diese Abbildung strebt gegen die folgende Abbildung:



An dieser asymptotischen Gestalt von $\hat{S}_\alpha$ sieht man, daß "fast alle" Anfangswerte unter $\hat{S}_\alpha$ auf 0 abgebildet werden. Periodische und aperiodische Punkte können nur in der Nähe der "Inseln" $\frac{1}{2}$ und 1 existieren. Vom praktischen Standpunkt ist die Abbildung $\hat{S}_\alpha$ daher vergleichbar mit der Abbildung im Beispiel 2.2 : zwar ist für große α chaotisches Verhalten im Sinne von LI und YORKE gewährleistet, beobachten wird man aber "in der Regel", daß ein beliebig gewählter Anfangspunkt unter Iteration auf 0 abgebildet wird.

Zwar hängt die Abbildung $\hat{S}_\alpha$ auf subtilere Weise vom Parameter α ab als etwa die quadratische Nichtlinearität in (2.5). Dennoch wird man sich fragen, in welcher Reihenfolge die periodischen Punkte in Abhängigkeit von α auftreten (SHAROVSKI-Folge ? FEIGENBAUM-Sequenz ? vgl. / 9/).

Zur Klärung dieser Frage und der vorher angesprochenen Frage nach der "Relevanz chaotischen Verhaltens im Sinne von LI und YORKE" haben wir einige numerische Versuche durchgeführt, die wir im folgenden beschreiben und zu analysieren versuchen.

NUMERISCHE UNTERSUCHUNGEN

(a) Verzweigungsverhalten

In Abhängigkeit vom Parameter α treten die periodischen Punkte ab $\alpha = 2$ in der Reihenfolge der SHARKOVSKII-Folge auf. Als Konsequenz aus der speziellen stückweis linearen Struktur der Abbildung $\hat{S}_\alpha$ zweigen jedoch die $\hat{S}_\alpha^2, \hat{S}_\alpha^4, \dots, \hat{S}_\alpha^{2^k}$ -Fixpunkte alle im gleichen Parameterwert $\alpha = 2$ von den $\hat{S}_\alpha$ -Fixpunkten ab, das heißt die "Kaskadenverzweigung" (und damit die FEIGENBAUM-Sequenz) schrumpft in einen einzigen Punkt zusammen ("Büschelverzweigung").

Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, daß der Anstieg der Abbildung $\hat{S}_\alpha|_{J_\alpha}$ ($J_\alpha = [\frac{\alpha-1}{2\alpha-1}, 2(\frac{\alpha-1}{2\alpha-1})^2]$) für $\alpha > 2$ betragsmäßig größer als 1 ist.

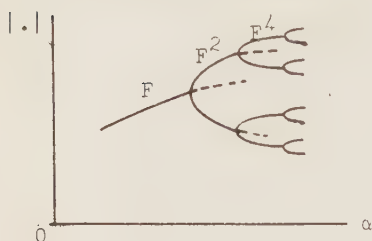


Der $\hat{S}_\alpha$ -Fixpunkt hat deshalb bezüglich der Abbildung $\hat{S}_\alpha^2$ den Index -1. Die infolgedessen abzweigenden $\hat{S}_\alpha^2$ -Fixpunkte haben Index -1 bezüglich $\hat{S}_\alpha^4$ usw.

Die $\hat{S}_\alpha^{2^k}$ -Fixpunkte entstehen also alle im gleichen Parameterwert $\alpha = 2$ und sind vom Augenblick ihrer Entstehung an instabil.

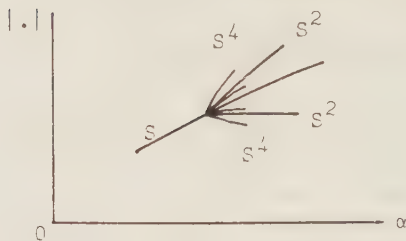
glatter Fall

"Kaskadenverzweigung"



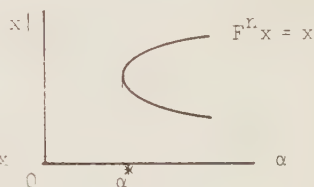
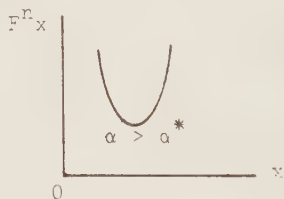
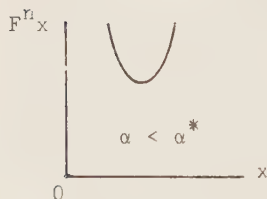
Modellfall

"Büschelverzweigung"

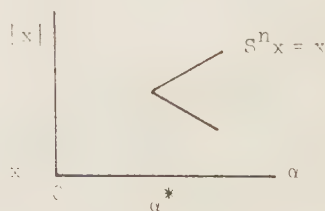
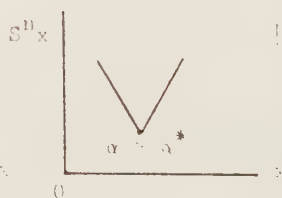
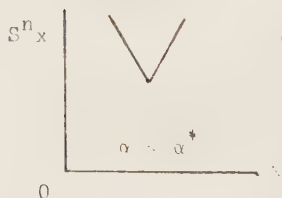


Die $\hat{S}_\alpha^n$ -Fixpunkte ($n \neq 2^k$) treten wie im glatten Fall (vgl. /11/) durch sogenannte "tangent"-Verzweigung auf ^{*)}:

glatter Fall (vgl. /11/)



Modellfall



^{*)} Der Begriff "Verzweigung" ist hier insofern irreführend, als es sich nicht um das Abzweigen neuer Lösungen von einer bekannten Basislösung handelt. Wir passen uns dennoch in diesem Abschnitt dem Sprachgebrauch in /11/ an.

Numerisch haben wir für $\hat{S}_\alpha$ einige der "tangente"-Verzweigungspunkte ermittelt (die letzten Glieder der SHARKOVSKII-Folge):

$$\begin{array}{ccccc} \hat{S}_\alpha^{11} & \hat{S}_\alpha^9 & \hat{S}_\alpha^7 & \hat{S}_\alpha^5 & \hat{S}_\alpha^3 \\ \alpha_{11}^* & + \alpha_9^* & + \alpha_7^* & + \alpha_5^* & + \alpha_3^* \\ 2.765 & < 2.798 & < 2.841 & < 2.857 & < 2.884 \end{array}$$

Schließlich noch :

$$\begin{array}{ccccc} \hat{S}_\alpha^{12} & & \hat{S}_\alpha^6 & & \hat{S}_\alpha^3 \\ \alpha_{12}^* & \dots & \alpha_6^* & \dots & \alpha_3^* \\ 2.163 & < 2.342 & < 2.884 \end{array}$$

Für $\alpha > \alpha_{12}^*$ ist die Abbildung $\hat{S}_\alpha^4$ chaotisch ($\hat{S}_\alpha^4$ hat einen Punkt der Periode 3), für $\alpha > \alpha_6^*$ ist $\hat{S}_\alpha^2$ chaotisch, für $\alpha > \alpha_3^* = \alpha^*$ (wie zuvor bewiesen) die Abbildung $\hat{S}_\alpha$.

(b) Histogramme

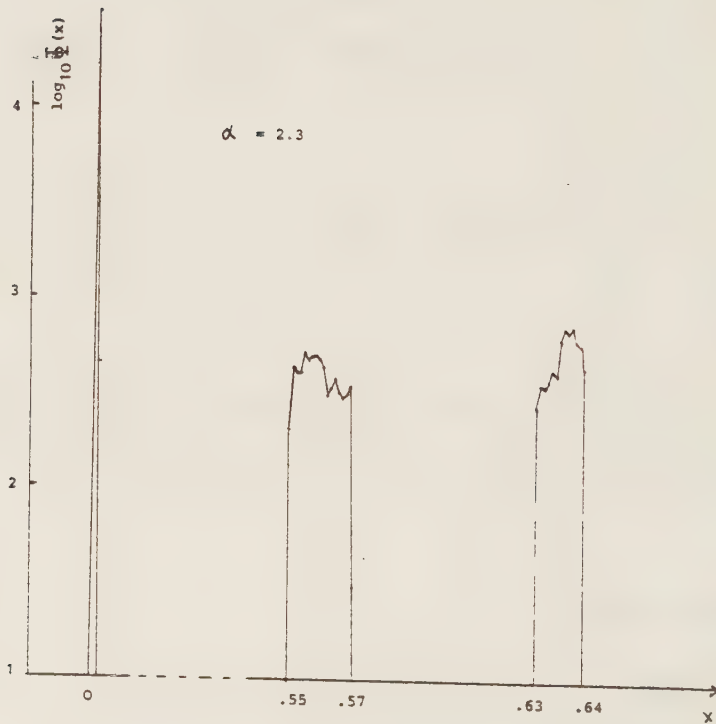
Zur genaueren Untersuchung des chaotischen Verhaltens der Abbildung $\hat{S}_\alpha$ haben wir in Anlehnung an /15/ folgende numerische Versuchsreihe durchgeführt:

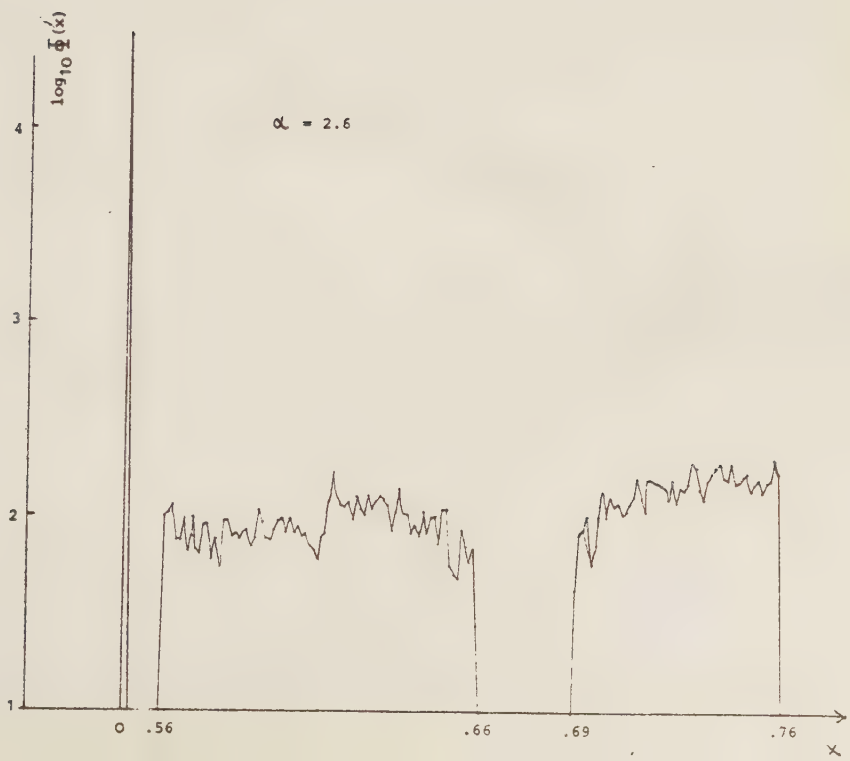
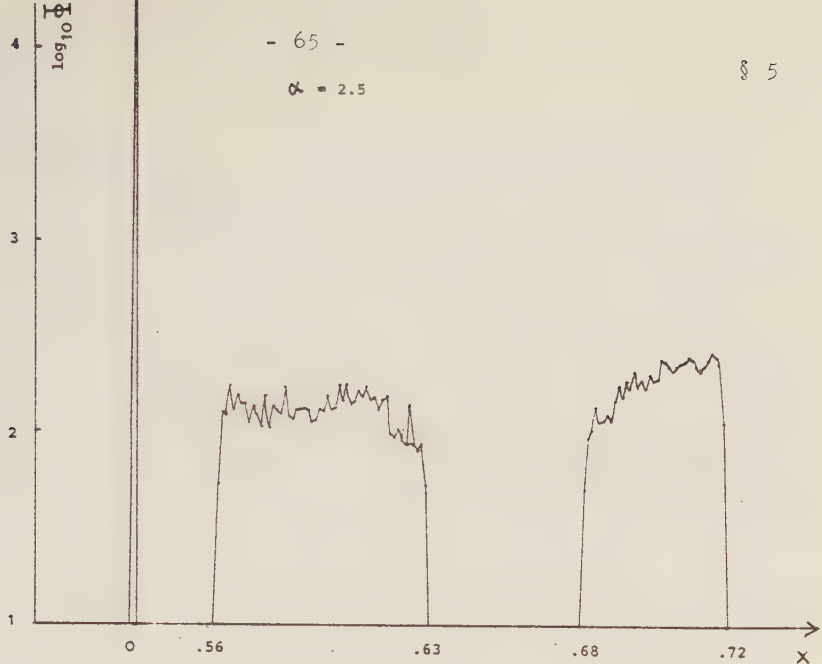
Das Intervall $I_\alpha = [0, 2\frac{\alpha-1}{\alpha}]$ wird in 1000 gleich große Zellen $I_1, \dots, I_{1000}$ eingeteilt. Mit Hilfe eines in /23/ beschriebenen Zufallszahlengenerators werden 100 Startwerte $x^1, \dots, x^{100} \in I_\alpha$ bestimmt. Jeder dieser Werte x^i wird unter $\hat{S}_\alpha$ 500 mal iteriert.

Die Verteilung der Werte $x_{50}^1, \dots, x_{500}^1$ ($1 \leq i \leq 100$; $x_0^i := x^i$; $x_k^i := \hat{S}_\alpha^k(x^i)$) bei festem α auf die Zellen

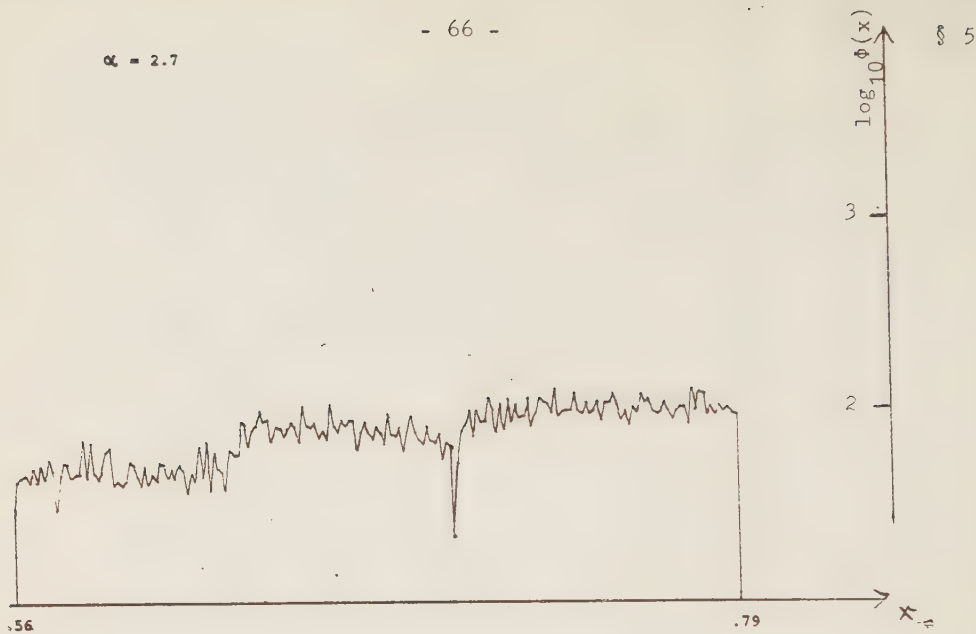
$I_1, \dots, I_{1000}$ ist den folgenden Diagrammen zu entnehmen.
Aufgetragen ist jeweils der Zehnerlogarithmus der Trefferzahl

$$\Phi(I_k) = \# \{ x_j^{i_k} \in I_k \mid 1 \leq i \leq 100 ; 50 \leq j \leq 500 \}$$

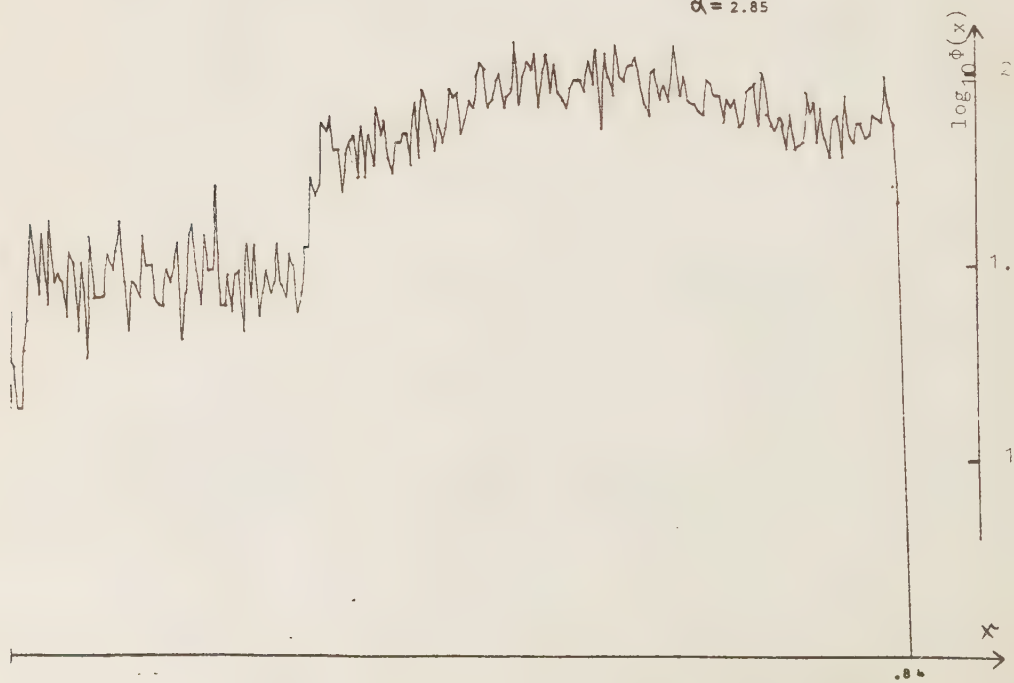




$\alpha = 2.7$



$\alpha = 2.85$



Erläuterung

Für $\alpha \in (2,3)$ fällt unabhängig von α ungefähr die Hälfte aller berechneten Werte in die Zelle I_0 .

Daneben bilden sich für $\alpha > 2$ zwei signifikante Spitzen heraus, die sich mit wachsendem α verbreitern, schließlich bei $\alpha \approx 2.7$ zusammenwachsen. Für $\alpha \approx 2$, $\alpha > 2$, beobachtet man also (neben dem Fixpunkt 0) annähernd einen Punkt der Periode 2, der mit wachsendem α mehr und mehr "verschmiert", schließlich in ein Intervall übergeht.

Für $\alpha > 3.1$ wird nur noch eine Spitze in I_0 beobachtet. Das heißt: die zufällig gewählten Anfangswerte streben alle gegen den Fixpunkt 0 (obwohl nach Satz 5.2 die Existenz unendlich vieler periodischer und aperiodischer Punkte gesichert ist). Diese Beobachtung wird zum Teil erklärt durch das asymptotische Verhalten der Abbildung $\hat{S}_\alpha$ (vgl. Seite 60). Für praktische Belange wird man also das chaotische Verhalten für Parameterwerte $\alpha \gg 3$ als "irrelevant" ansehen dürfen.

#

Alle für die Abbildung $\hat{S}_\alpha$ erzielten Ergebnisse können als Ergebnisse über periodische Lösungen für Gleichung (4.2) mit Nichtlinearität (4.3) interpretiert werden. Diese Übersetzung liefert das folgende Hauptresultat dieses Abschnitts :

5.4 SATZ

(1) Für alle $\alpha > 0$ hat Gleichung (4.2) mit Nichtlinearität (4.3) genau eine periodische Lösung vom R-Typ.

Diese Lösung hat (als Fixpunkt der Abbildung $\hat{S}_\alpha$) die

Fixpunktindex $+1$ für $\alpha < 2$ und -1 für $\alpha > 2$.

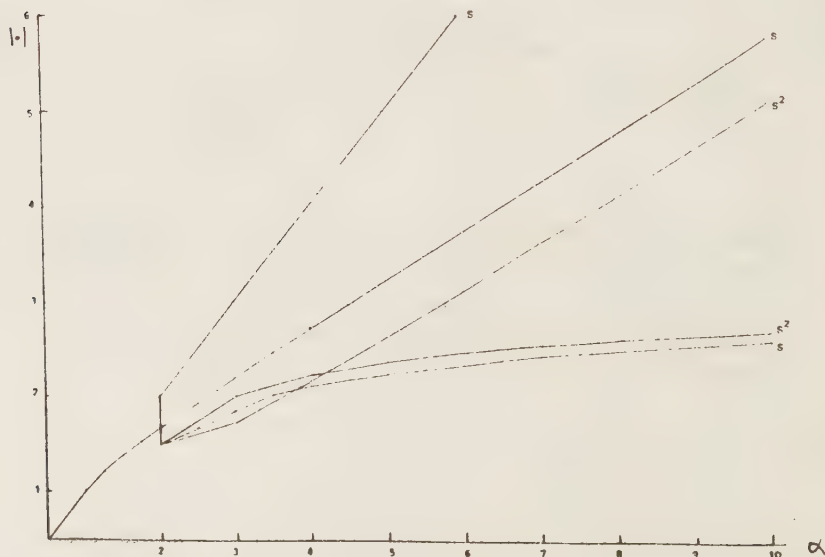
(2) Aufgrund des Indexwechsels zweigen in $\alpha = 2$ zwei periodische Lösungen vom S-Typ von der periodischen Lösung vom R-Typ ab. Die t-Perioden der abzweigenden Lösungen streben für wachsendes α gegen Unendlich bzw. gegen 2.

(3) Für $\alpha > 2$ existieren unendlich viele verschiedene periodische Lösungen. Diese periodischen Lösungen sind vom S^{2^k} -Typ.

Periodische Lösungen vom S^j -Typ ($j \neq 2^k$) treten sukzessiv in der Reihenfolge der SHARKOVSKII-Folge auf.

Für $\alpha > \alpha^* \approx 2.884$ existieren Fixpunkte für alle iterierten S_{α}^j , $j \in \mathbb{N}$, insbesondere Fixpunkte von S_{α}^3 .

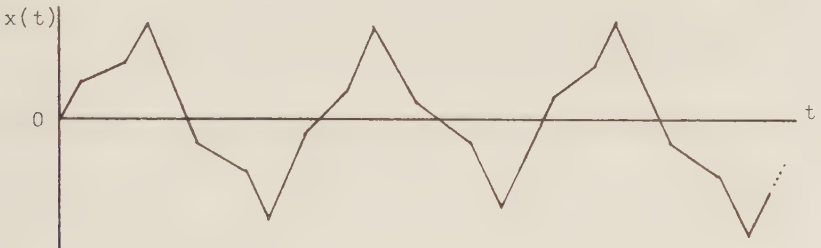
(4) Für $\alpha > \alpha^*$ existieren darüberhinaus aperiodische Lösungen, das heißt oszillierende Lösungen der Gleichung (4.2), die nicht nach 0 abklingen und die asymptotisch nicht periodisch werden.



Die zum S_{α}^3 -Fixpunkt gehörende periodische Lösung sieht dabei etwa folgendermaßen aus:



Eine "typische" aperiodische Lösung hat etwa folgendes Aussehen:



Die zugehörige Punktfolge im Simplex Δ_{α}^2 springt zwischen Seite und Innerem irregulär hin und her. Das folgende Bild beschreibt gewissermaßen den "strange attractor" der Gleichung (4.2) mit Nichtlinearität (4.3):



Fixpunkt •

§ 6 Mehrparameter - Probleme

In diesem Abschnitt soll zunächst gezeigt werden, daß das Phänomen des Indexwechsels und der Sekundärverzweigung nicht an das zuvor diskutierte spezielle Beispiel gebunden ist. Dazu werden wir ein allgemeines Zweistufen-Modell untersuchen.

Zum Nachweis chaotischen Verhaltens sind globale Informationen über den Verschiebeoperator nötig, die bei einem Mehrparameter-Problem nur mit sehr viel Rechenaufwand erhältlich sind und wo dann das erzielte Ergebnis in keinem Verhältnis zu dem betriebenen Aufwand zu stehen scheint. Dennoch soll auch in Bezug auf chaotisches Verhalten gezeigt werden, daß die zuvor diskutierte Nichtlinearität (4.3) nicht "isoliert" Chaos erzeugt, sondern daß sich das chaotische Verhalten innerhalb der Klasse der Zweistufen-Modelle auf benachbarte Nichtlinearitäten fortsetzt.

Eine Gegenüberstellung der Resultate für die Modellgleichungen mit stückweis konstanten Nichtlinearitäten mit numerischen Resultaten zu Gleichungen mit stetigen Nichtlinearitäten (/18/) zeigt, daß Zweistufen-Modelle eine wichtige qualitative Erscheinung bei glatten Gleichungen nicht aufweisen: das Abzweigen periodischer Lösungen vom S^2 -Typ von periodischen Lösungen vom R-Typ (kurz: "periodenverdoppelnde" Verzweigung, obwohl sich die t -Periode der zugehörigen periodischen Lösung nicht verdoppelt). Auf dieses qualitative Phänomen hin werden wir am Schluß dieses Abschnitts in einer sehr speziellen Weise (Konstruktion des Kontinuums der periodischen Lösungen vom R-Typ über Phasenebene) Dreistufen-Modelle untersuchen. Als Nebenprodukt erhalten wir ein Resultat über Verzweigung quasiperiodischer Lösungen. Dieses Phänomen ist unseres Wissens bei zeitverzögerten Gleichungen des Typs (4.2) bisher noch nicht beobachtet worden.

Dieser ganze Abschnitt kann in gewisser Weise als Versuch verstanden werden, die für eine spezielle Gleichung gefundenen

Phänomene im Rahmen von Treppenfunktions-Modellen als "strukturell stabil" nachzuweisen. Inwieweit sich die Phänomene auf Gleichungen mit glatten Nichtlinearitäten fortsetzen, wird nicht untersucht.

(a) Allgemeines Zweistufen-Modell

In allgemeiner Form hat eine ungerade Zweistufen-Funktion die Gestalt

$$(6.1) \quad f_{a,b}^{\delta}(x) = \text{sign}(x) \begin{cases} a & ; \quad |x| < \delta \\ b & ; \quad |x| \geq \delta \end{cases}$$

Nun ist $y(t)$ genau dann Lösung der Gleichung

$$(6.2) \quad y'(t) = -f_{a,b}^{\delta}(y(t-1))$$

wenn $x(t) := \frac{1}{\delta} y(t)$ die Gleichung

$$(6.3) \quad x'(t) = -f_{\alpha,\beta}(x(t-1))$$

mit

$$(6.4) \quad f_{\alpha,\beta}(x) = \text{sign}(x) \begin{cases} \alpha := \frac{a}{\delta} & ; \quad |x| < 1 \\ \beta := \frac{b}{\delta} & ; \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

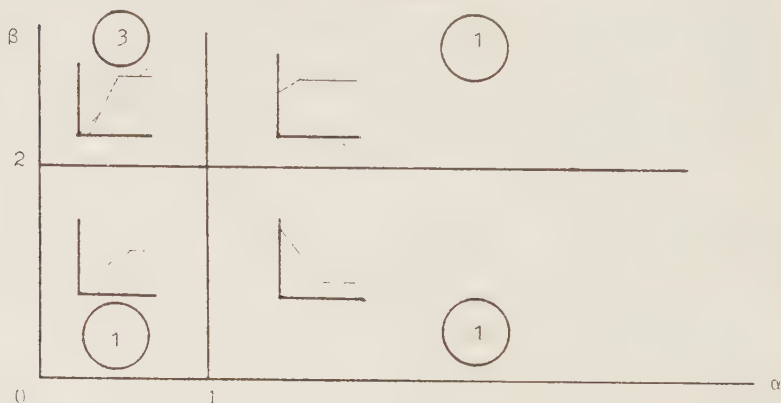
erfüllt. Das heißt wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Unstetigkeitsstellen der Funktion $f_{\alpha,\beta}$ bei 0 und 1 (und -1) liegen.

Für das Zweiparameter-Problem (6.3) berechnen wir die vom Verschiebeoperator $R_{\alpha,\beta}$ induzierte Abbildung $\tilde{R}_{\alpha,\beta}$:

6.5 LEMMA Der Operator $R_{\alpha,\beta}$ induziert eine Abbildung
 $\mathcal{R}_{\alpha,\beta} : [0,1] \rightarrow [0,1]$, die gegeben ist durch:

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} 0 & ; \alpha \leq 1 \text{ und } \beta \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \alpha > 1 \text{ oder } \beta > 1 ; 0 \leq y \leq \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta} \\ 1 - \frac{1+(\alpha-\beta)y}{\alpha} ; & " ; \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta} \leq y \leq \frac{1}{\beta} \\ 1 - \frac{1}{\beta} ; & " ; \frac{1}{\beta} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Die entsprechenden Graphen der Abbildung $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ und die Anzahl der Fixpunkte in Abhängigkeit von α und β beschreibt das folgende Diagramm:

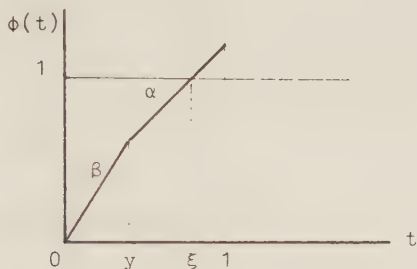


Beweis: Zunächst bildet der Operator $R_{\alpha,\beta}$ die Menge
 $P^* = P \setminus \{0\}$ ($P = \{ \phi \in C[0,1] \mid \phi(0) = 0, \phi \text{ monoton wachst.} \}$)
in die Teilmenge

$$N_{\alpha,\beta} := \{ \phi \in P^* \mid \phi(t) = \begin{cases} \beta t & ; t \in [0, y] \\ \alpha t + (\beta - \alpha)y & ; t \in [y, 1] \end{cases} ; 0 \leq y \leq 1 \}$$

ab. Vermöge der Koordinate y identifizieren wir $N_{\alpha,\beta}$ mit dem
Intervall $[0,1]$. (Der Koordinate $y=0$ haben wir dabei die
Funktion ϕ_0 mit konstantem Anstieg α zugeordnet).

Zur Berechnung von $\mathcal{R}_{\alpha,\beta} : [0,1] \rightarrow [0,1]$ unterscheiden wir zwei Fälle:



(1) $\|\phi\| \leq 1$: Wegen $\|\phi\| = \phi(1) = \beta y + \alpha(1-y)$ tritt dieser Fall genau dann ein, wenn

(a) $\alpha \leq 1$ und $\beta \leq 1$

(b) $\alpha \leq 1$, $\beta \geq \alpha$ und $0 \leq y \leq \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$

Die Lösung x^ϕ hat dann auf dem Intervall $[1,2]$ konstanten Anstieg $-\alpha$, das heißt $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}(y) = 0$.

(2) $\|\phi\| > 1$: Sei $\xi \in [0,1]$ der Punkt mit $\phi(\xi) = 1$. Man berechnet

$$\xi = \frac{1+(\alpha-\beta)y}{\alpha}, \text{ falls } y \leq \xi$$

$$\xi = \frac{1}{\beta}, \text{ falls } \xi \leq y$$

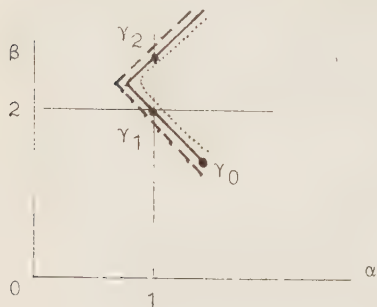
Wegen $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}(y) = 1-\xi$ liefert Einsetzen der für ξ möglichen Fälle die Behauptung.

q.e.d.

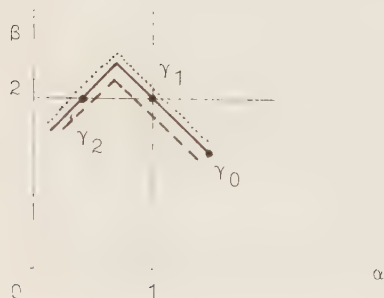
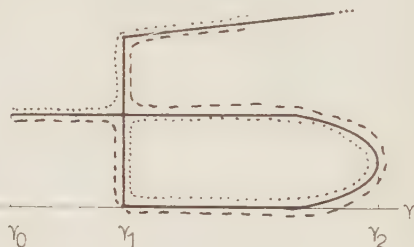
Der Operator $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ zur Gleichung (6.3), dessen Fixpunkte Anfangswerte periodischer Lösungen vom R-Typ der Gleichung (6.3) sind, ist durch Lemma 6.5 vollständig beschrieben. Ins-

besondere lassen sich durch Wahl von Wegen in der (α, β) -Parameterebene künstlich Verzweigungsdiagramme konstruieren.

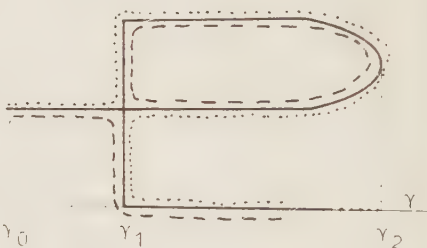
Wir skizzieren einige Beispiele:



|•|



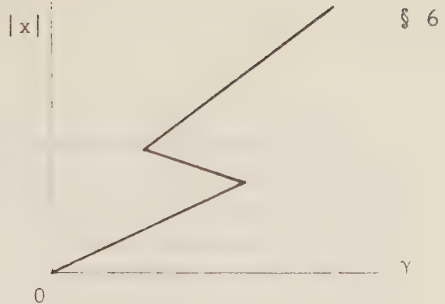
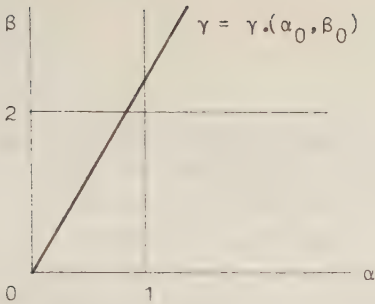
|•|



Damit haben wir einfache Beispiele gefunden für

- Rückverzweigung
- isolierte Lösungskontinua
- Entfaltung (Auflösung) einer Verzweigung durch Störung der Parameter

Die in § 3 über die Phasenebene ermittelten Verzweigungsdiagramme (vgl. Lemma 3.9) entsprechen dem Spezialfall eines von 0 ausgehenden geraden Weges in der (α, β) -Parameterebene. Dies beleuchtet, wie einschränkend die Festlegung auf ein Problem mit äußerem Parameter (Gleichung (3.7)) gegenüber der Lösungsvielfalt bei einem Problem mit innerem Parameter (Gleichung (6.3)) sein kann.



Wie das Beispiel der Gleichung (4.2) zeigt, können außer periodischen Lösungen vom R-Typ auch noch andere periodische Lösungen, zum Beispiel periodische Lösungen vom S-Typ, existieren. Das folgende Lemma gibt ein Kriterium dafür an, daß periodische Lösungen vom R-Typ die einzig möglichen sind (vgl. hierzu auch /27/).

6.6 LEMMA Es sei $\alpha < \beta$. Dann ist jede periodische Lösung vom S^k -Typ ($k \in \mathbb{N}$) der Gleichung (6.3) auch periodische Lösung vom R-Typ.

Beweisskizze: Der Beweis beruht auf einer expliziten Berechnung der Abbildung $\tilde{S}_{\alpha,\beta} : \Delta^2 \rightarrow \Delta^2$ *) , die analog zu der Rechnung in Satz 4.8 verläuft.

Wir teilen lediglich das Ergebnis dieser Rechnung mit: $\tilde{S}_{\alpha,\beta}$ bildet Δ^2 auf die Seite $\{(0,y,1-y) \mid 0 \leq y \leq 1\} \subset \Delta^2$ ab. Nach einigen Fallunterscheidungen findet man, daß die Fixpunkte von $\tilde{S}_{\alpha,\beta}$ mit den Fixpunkten von $\tilde{R}_{\alpha,\beta}$ (maximal drei, vgl. Lemma 6.5) übereinstimmen.

q.e.d.

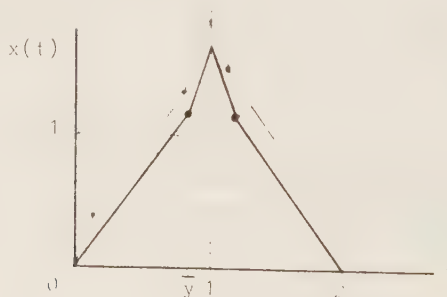
*) Wir setzen zur Abkürzung (wie schon in § 3) $\Delta^2 := \Delta_{\alpha,\beta}^2$

Da wir gerade an Parametern (α, β) interessiert sind, für welche Gleichung (6.3) auch andere als periodische Lösungen vom R-Typ zuläßt, beschränken wir uns jetzt auf die Untersuchung von Parametern (α, β) mit $\alpha > \max\{1, \beta\}$. Gemäß Lemma 6.5 hat die Abbildung $\tilde{R}_{\alpha, \beta}$ für solche Parameter genau einen Fixpunkt, das heißt es gibt bei dieser Parameterwahl zu jedem (α, β) genau eine periodische Lösung vom R-Typ. Daneben existieren aber unter Umständen andere periodische Lösungen, z.B. periodische Lösungen vom S-Typ, S^2 -Typ usw. (wie Satz 5.4 für den Fall $\beta = 1$ zeigt).

Wir berechnen die Abbildung $\tilde{S}_{\alpha, \beta}$ in einer Umgebung des (eindeutigen) $\tilde{R}_{\alpha, \beta}$ -Fixpunktes. Zwei Fälle sind zu unterscheiden (vgl. Diagramm in Lemma 6.5):

1. Fall : $\beta > 2$

In diesem Fall ist der eindeutige Fixpunkt der Abbildung $\tilde{R}_{\alpha, \beta}$ $\bar{y} = \frac{\beta-1}{\beta} \in [0, 1]$. Der zu $\bar{y}$ korrespondierende Punkt im Simplex Δ^2 ist $(0, \frac{\beta-1}{\beta}, \frac{1}{\beta}) \in \Delta^2$. Wir berechnen $\tilde{S}_{\alpha, \beta}$ in einer Umgebung $U_\epsilon := B_\epsilon((0, \frac{\beta-1}{\beta}, \frac{1}{\beta})) \cap \Delta^2$ dieses Fixpunktes.



Sei also $(x, y, z) \in U_\epsilon \subset \Delta^2$. Dann ist $\tilde{S}_{\alpha, \beta}(x, y, z) = (0, \frac{\beta-1}{\beta}, \frac{1}{\beta})$ wie man leicht ausrechnet. Das heißt aber: die Eigenwerte der (konstanten) Abbildung $\tilde{S}_{\alpha, \beta}$ in der Nähe des $\tilde{R}_{\alpha, \beta}$ -Fixpunktes sind 0.

Damit ist der Fixpunktindex des Fixpunktes $(0, \bar{y}, 1 - \bar{y})$ gemäß Satz 1.9

$$i((0, \bar{y}, 1 - \bar{y}), \mathfrak{S}_{\alpha, \beta}) = (-1)^0 = +1$$

2. Fall : $\beta < 2$

Einziger Fixpunkt der Abbildung $\mathfrak{R}_{\alpha, \beta}$ ist $\bar{y} = \frac{\alpha-1}{2\alpha-\beta}$.

Wegen $\alpha > \max\{1, \beta\}$ ist

$$\beta \bar{y} = \beta \frac{\alpha-1}{2\alpha-\beta} < 1$$

Mit $\xi = \frac{1+(\alpha-\beta)y}{\alpha}$ und $\|\phi\| = \phi(1) = \alpha + (\beta-\alpha)y$ ist dann die Abbildung $\mathfrak{S}_{\alpha, \beta}$ in einer Umgebung des Fixpunktes $(0, \bar{y}, 1 - \bar{y}) = (0, \frac{\alpha-1}{2\alpha-\beta}, \frac{\alpha-\beta+1}{2\alpha-\beta}) \in \Delta^2$ gegeben durch

$$\mathfrak{S}_{\alpha, \beta}(x, y, z) = (0, \frac{\alpha-1}{\alpha} + (\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta})\|\phi\| + (\frac{\alpha}{\beta} - 1)\xi, \dots)$$

(Die dritte Koordinate Z des Bildvektors (X, Y, Z) ist eindeutig durch die beiden ersten festgelegt: $Z = 1 - X - Y$)

Als Eigenwerte dieser (affin linearen) Abbildung erhält man

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad ; \quad \lambda_3 = 2\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2\right) > 0$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \lambda_3 < 1 &\Leftrightarrow 2\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2\right) < 1 \\ &\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 4\alpha\beta < \alpha\beta \\ &\Leftrightarrow \beta^2 - \frac{5}{2}\alpha\beta + \alpha^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} < \beta < 2\alpha \end{aligned}$$

Für $\beta < \frac{\alpha}{2}$ ist also $\lambda_3 > 1$ und daher der Fixpunktindex des Fixpunktes $(0, \bar{y}, 1 - \bar{y})$ nach Satz 1.9

$$i((0, \bar{y}, 1 - \bar{y}), \mathfrak{S}_{\alpha, \beta}) = (-1)^1 = -1$$

Dies beweist den folgenden

6.7 SATZ Sei $(\alpha, \beta) \in A := \{(\alpha, \beta) \mid \alpha > \max\{1, \beta\}\}$.

Der Fixpunktindex des (eindeutigen) $\hat{R}_{\alpha, \beta}$ -Fixpunktes

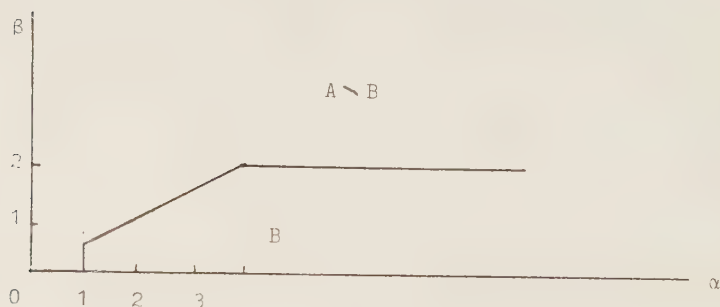
$\bar{y} = \bar{y}_{\alpha, \beta} \in [0, 1]$ bezüglich der Abbildung $\hat{S}_{\alpha, \beta} : \Delta^2 \rightarrow \Delta^2$

ist :

$$i((0, \bar{y}, 1 - \bar{y}), \hat{S}_{\alpha, \beta}) = \begin{cases} -1 & , \text{ falls } (\alpha, \beta) \in B \\ +1 & , \text{ falls } (\alpha, \beta) \in A \setminus B \end{cases}$$

Dabei ist $B := \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \geq 1, 0 \leq \beta \leq \min\{\frac{\alpha}{2}, 2\}\} \subset A$.

Insbesondere zweigen infolge des Indexwechsels bei geeigneter Parameterwahl Fixpunkte der Abbildung $\hat{S}_{\alpha, \beta}$ von Fixpunkten der Abbildung $\hat{R}_{\alpha, \beta}$ ab.



Beweis: Klar nach dem Vorhergehenden

q.e.d.

Das Abzweigen periodischer Lösungen vom S-Typ von periodischen Lösungen vom R-Typ ist damit keine pathologische Eigenschaft des in den §§ 4,5 diskutierten speziellen ($\beta = 1$) Zweistufen-Modells.

Aus der Tatsache, daß alle Eigenwerte der in der Nähe des $\tilde{R}_{\alpha,\beta}$ -Fixpunktes berechneten Abbildung $\tilde{S}_{\alpha,\beta}$ positiv sind, können wir noch eine andere Folgerung ziehen :

6.8 KOROLLAR Unter den gleichen Voraussetzungen an die Parameter (α,β) wie in Satz 6.7 ist ein durch Indexwechsel verursachtes Abzweigen periodischer Lösungen vom S^2 -Typ (die nicht periodische Lösungen vom S-Typ sind) von den periodischen Lösungen vom R-Typ nicht möglich.

Beweis: Für einen Indexwechsel bezüglich der Abbildung $\tilde{S}_{\alpha,\beta}^2$, der nicht bereits Indexwechsel bezüglich $\tilde{S}_{\alpha,\beta}$ ist, müßte ein Eigenwert der Abbildung $\tilde{S}_{\alpha,\beta}$ den Wert -1 kreuzen. Da alle Eigenwerte positiv sind, ist das nicht möglich.

qed.

Ebenso wie die Sekundärverzweigung läßt sich auch das Chaos-Resultat (Satz 5.2) von der speziellen Parameterwahl ($\beta = 1$) lösen und auf eine Umgebung von $\beta = 1$ ausdehnen. Wir wollen das an dieser Stelle nur bemerken, aber keine Rechnungen vorführen, da sie im wesentlichen genauso verlaufen wie in §§ 4,5. Stattdessen untersuchen wir das Verhalten der Abbildung $\tilde{S}_{\alpha,\beta}$ für Parameter $\beta > 2$. Obwohl sich in diesem Bereich der Fixpunktindex der $\tilde{R}_{\alpha,\beta}$ -Fixpunkte bezüglich $\tilde{S}_{\alpha,\beta}$ nicht ändert, ein durch Indexwechsel verursachtes Verzweigen von $\tilde{S}_{\alpha,\beta}$ -Fixpunkten von $\tilde{R}_{\alpha,\beta}$ -Fixpunkten also nicht auftritt, existieren unter gewissen Voraussetzungen an α und β dennoch $\tilde{S}_{\alpha,\beta}$ -Fixpunkte (die nicht verzweigen).

6.9 SATZ Es sei $2 < \beta < \alpha$ und $\alpha > 6$. Auf der Teilmenge

$$M := \{(x, y, z) \in \Delta^2 \mid x \leq \frac{1}{\alpha}; \alpha x + \beta y \geq 1\}$$

des Simplex Δ^2 induziert der Verschiebeoperator $S_{\alpha, \beta}$ zur Gleichung (6.3) eine affin lineare Abbildung $\tilde{S}_{\alpha, \beta}$, die gegeben ist durch:

$$\tilde{S}_{\alpha, \beta}(x, y, z) =$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1-\beta}{\beta} + \frac{\beta-\alpha}{\beta}x - \frac{\beta-\alpha}{\alpha}y, 2 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{\beta-\alpha}{\beta}x + \frac{\beta-\alpha}{\alpha}y, \dots \right) & \text{falls } (x, y, z) \in M_1 \\ \left(0, 2 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - 2\right)y + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)x, \dots \right) & \text{falls } (x, y, z) \in M_2 \\ (0, 0, 1) & \text{falls } (x, y, z) \in M \setminus (M_1 \cup M_2) \end{cases}$$

(Die dritte Koordinate des Bildvektors ist durch die beiden ersten festgelegt)

Hierbei ist

$$M_1 = \{(x, y, z) \in M \mid w \leq 0\}$$

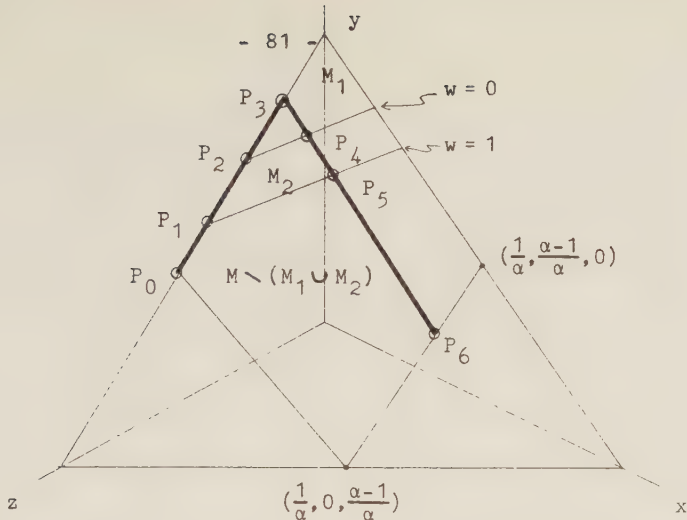
$$M_2 = \{(x, y, z) \in M \mid 0 \leq w \leq 1\}$$

wobei $w := \|\phi\| - \alpha\xi$ mit $\|\phi\| = \alpha + (\beta - \alpha)y$; $\xi = \frac{1 - \alpha x}{\beta}$.

Beweis: Durch explizites Ausrechnen, analog zum Beweis von Satz 4.8.

qed.

Das Bild der Menge M unter $\tilde{S}_{\alpha, \beta}$ ist offensichtlich wieder eine eindimensionale Teilmenge von Δ^2 :



Die Reduktion auf eine eindimensionale Abbildung berechnen wir nicht explizit, sondern veranschaulichen sie lediglich durch die folgenden Bilder:

Zunächst berechnet man die (oben eingezeichneten) Punkte $(P_i)_{0 \leq i \leq 6}$:

$$P_0 = \left(0, \frac{1}{\beta}, \frac{\beta-1}{\beta}\right) ; \quad P_1 = \left(0, \frac{\alpha - \frac{\alpha}{\beta} - 1}{\alpha - \beta}, \dots\right) ; \quad P_2 = \left(0, \frac{\alpha - \frac{\alpha}{\beta}}{\alpha - \beta}, \dots\right)$$

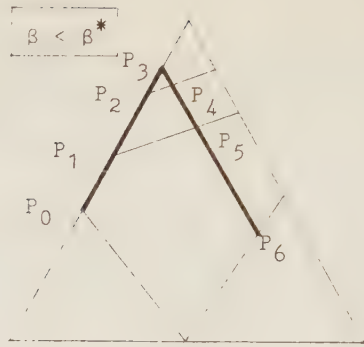
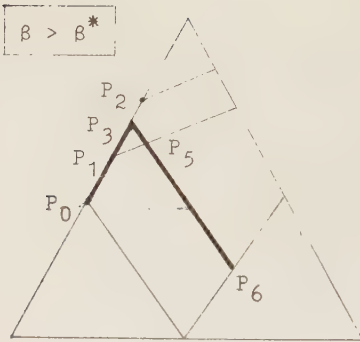
$$P_3 = \left(0, \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) ; \quad P_4 = \left(\dots, \frac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta}, \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$P_5 = \left(\dots, \frac{\alpha^2 - 2\alpha - \beta + \alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta}, \frac{1}{\alpha}\right) ; \quad P_6 = \left(\frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{2}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$$

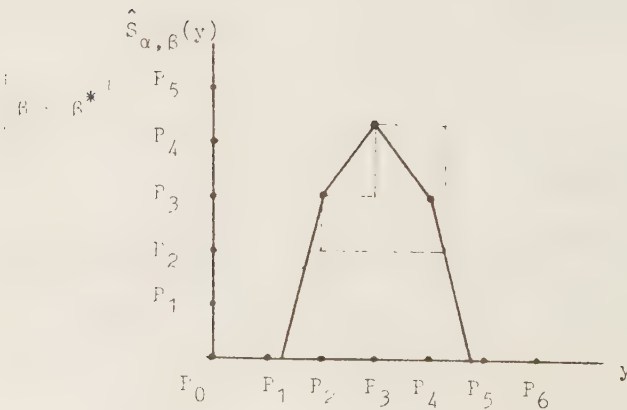
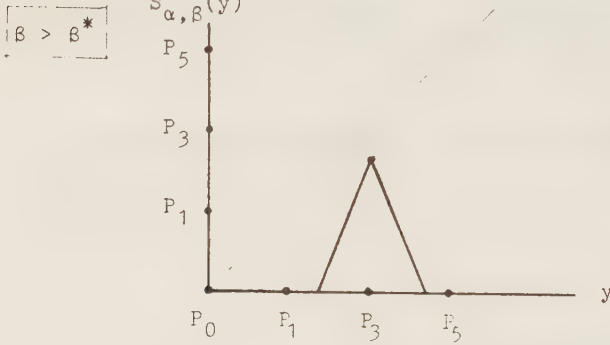
Für

$$\beta = \beta^* = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} (\sqrt{4\alpha-3} - 1)$$

stimmt die y -Koordinate von P_3 mit der y -Koordinate von P_2 überein. Für $\beta < \beta^*$ (bzw. $\beta > \beta^*$) liegt folgende Situation vor:



Demnach induziert $\hat{S}_{\alpha, \beta}$ für $\beta \approx \beta^*$ eine eindimensionale Abbildung $\hat{S}_{\alpha, \beta}$, deren Graph wie folgt aussieht:

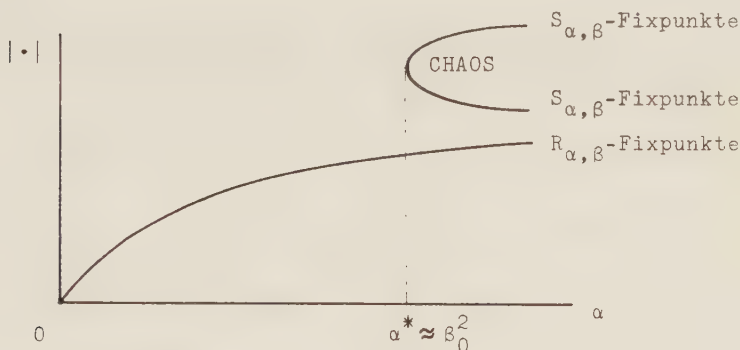


In dem kritischen Parameterwert

$$\beta = \beta^* = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} (\sqrt{4\alpha-3} - 1) \quad (\approx \sqrt{\alpha} \text{ für große } \alpha)$$

werden zwei $\hat{S}_{\alpha,\beta}$ -Fixpunkte erzeugt bzw. zerstört.

Ein zugehöriges Verzweigungsdiagramm für $\beta = \beta_0 > 2$ fest und α variabel sieht also etwa folgendermaßen aus:



Für geeignete Parameter (α, β) hat die Abbildung $\hat{S}_{\alpha,\beta}$ einen Punkt der Periode 3 und verhält sich damit chaotisch. Das chaotische Verhalten entwickelt sich in diesem Fall um einen Lösungszweig, der nicht infolge eines Indexwechsels von den $R_{\alpha,\beta}$ -Fixpunkten abgezweigt ist - im Gegensatz zu dem chaotischen Verhalten der Modellgleichung (4.2).

6.10 BEMERKUNGEN

- (1) Dem für $\beta < \beta^*$ existierenden Paar von $\hat{S}_{\alpha,\beta}$ -Fixpunkten entspricht ein Paar periodischer Lösungen vom S-Typ. Die t-Periode beider Lösungen ist kleiner als 4. In /27/ bemerkt NUSSBAUM, daß periodische Lösungen (vom S-Typ), deren t-Periode gegen Unendlich strebt, nur dann

existieren können, wenn für die Nichtlinearität f gilt:

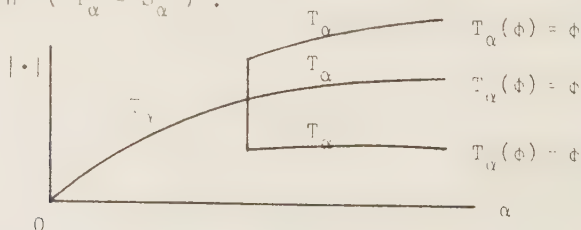
$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0$$

Die Beispiele im Rahmen von Zweistufen-Modellen zeigen, daß auch für den Fall, daß diese Bedingung verletzt ist, periodische Lösungen vom S-Typ neben periodischen Lösungen vom R-Typ existieren können.

(2) Die Sekundärverzweigung wird durch Übergang zu einer nicht ungeraden Funktion f etwa der Form

$$f(x) = \begin{cases} -\beta & ; \quad x \leq -1 \\ -\alpha & ; \quad -1 < x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ \alpha + \varepsilon & ; \quad 0 < x < 1 \\ \beta + \varepsilon & ; \quad 1 \leq x \end{cases}$$

nicht aufgelöst: Fixiert man $\beta = 1$ und $\varepsilon = \varepsilon_0 \ll 1$ und analysiert das Periodizitätsproblem in Abhängigkeit vom Parameter α , so zweigen vom Zweig der von 0 abzweigenden periodischen Lösungen neue periodische Lösungen ab. Da f nicht mehr ungerade ist, können diese periodischen Lösungen aber nicht mehr mit Fixpunkten der Operatoren R_α oder S_α identifiziert werden. Stattdessen handelt es sich in diesem Fall um das Abzweigen von T_α -Fixpunkten ($T_\alpha = S_\alpha^2$).



In Spezialfällen, die wir näher untersucht haben, setzt sich auch das chaotische Verhalten auf Gleichungen mit Nichtlinearitäten f , die nicht ungerade sind (aber in der Nähe ungerader Nichtlinearitäten liegen) fort.

Im Unterschied zu den von uns aufgedeckten Verzweigungen ("R→S-Verzweigung") tritt bei numerischen Untersuchungen der Gleichung (2.13) eine Verzweigung von S_α^2 -Fixpunkten von R_α -Fixpunkten ("R→ S^2 -Verzweigung") auf (vgl. /18/). Wie Korollar 6.8 zeigt, ist eine solche Verzweigung im Rahmen eines Zweistufen-Modells zumindest durch einen Indexwechsel nicht zu realisieren. Im Hinblick auf diesen qualitativen Aspekt sollen jetzt Dreistufen-Modelle diskutiert werden.

(b) Dreistufen - Modelle

Wir gehen von einer ungeraden Treppenfunktion

$$(6.11) \quad f(x) := f_{\alpha, \beta, \gamma}(x) = \text{sign}(x) \cdot \begin{cases} \alpha & ; \quad 0 < |x| \leq 1 \\ \beta & ; \quad 1 < |x| \leq 2 \\ \gamma & ; \quad 2 < |x| \end{cases}$$

und der zugehörigen Modell-Gleichung

$$(6.12) \quad x'(t) = -f(x(t-1))$$

aus. Wir werden zunächst ein Kontinuum von Fixpunkten der (vom Operator $R_{\alpha, \beta, \gamma}$) induzierten Abbildung $\tilde{R} := \tilde{R}_{\alpha, \beta, \gamma}$ berechnen. In einem zweiten Schritt werden wir dann die vom Verschiebeoperator $S_{\alpha, \beta, \gamma}$ induzierte Abbildung $\tilde{S} := \tilde{S}_{\alpha, \beta, \gamma}$ in der Nähe der $\tilde{R}$ -Fixpunkte berechnen und das Eigenwertverhalten dieser (affin linearen) Abbildung $\tilde{S}$ analysieren.

Zunächst überzeugt man sich davon, daß Anfangsfunktionen $\phi \in P^* = P - \{0\}$ durch $\tilde{R}$ in eine Teilmenge $\mathcal{M}_{\alpha, \beta, \gamma} \subset P^*$ abgebildet werden, die homöomorph zu einer Teilmenge des Standard-Simplex Δ^2 ist (vgl. § 3 für den Fall des Operators $\tilde{S}_\alpha$). Entweder durch explizites Berechnen der auf Δ^2 induzierten Abbildung $\tilde{R}$ (vgl. § 4) oder durch Analyse der Phasenebene beweist man:

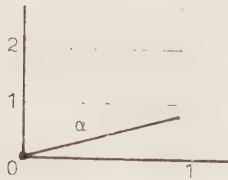
6.13 LEMMA Sei $\phi \in \mathcal{M}_{\alpha, \beta, \gamma}$ Anfangsfunktion einer periodischen Lösung vom R-Typ der Gleichung (6.12). Seien (x, y, z) die Koordinaten dieser Anfangsfunktion, d.h.

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} \gamma & \text{für } t \in [0, x) \\ \beta & \text{für } t \in [x, x+y) \\ \alpha & \text{für } t \in [x+y, 1] \end{cases}$$

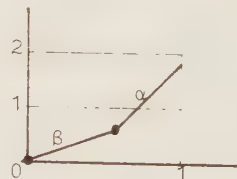
Sei ferner $t_0 := x$, $t_1 := x+y$.

Dann tritt genau einer der folgenden sechs möglichen Fälle ein:

(0) $\phi(t_0) = \phi(t_1) = 0$



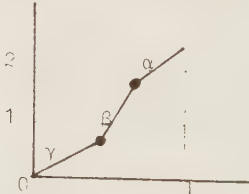
(1) $\phi(t_0) = 0 \leq \phi(t_1) \leq 1$



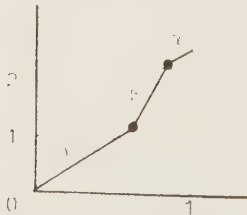
(2) $0 < \phi(t_0) \leq 1 \leq \phi(t_1) \leq 2$



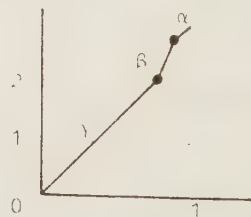
(3) $0 < \phi(t_0) \leq 1 \leq \phi(t_1) \leq 2$



(4) $1 < \phi(t_0) \leq 2 < \phi(t_1)$



(5) $2 < \phi(t_0) \leq \phi(t_1)$



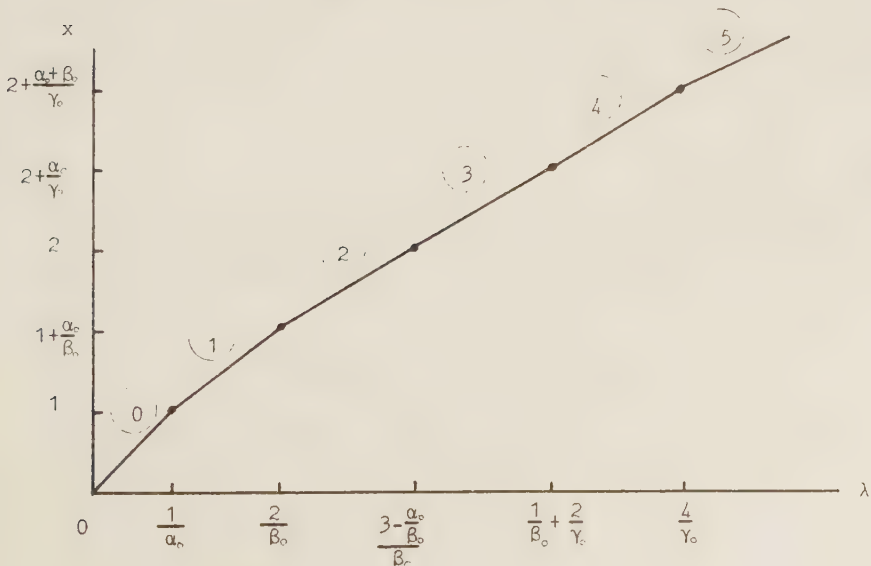
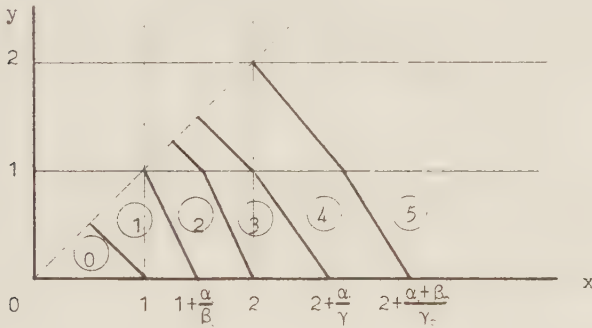
Beweis: Berechnung der Abbildung $\mathcal{R}$.

Wir wollen die den Fällen (0) bis (5) entsprechenden periodischen Lösungen vom R-Typ ab jetzt präziser als periodische Lösungen vom R_k -Typ ($k = 0, \dots, 5$) bezeichnen.

Fixiert man $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ und betrachtet die Gleichung mit äußerem Parameter

$$x'(t) = -\lambda f_{\alpha_0, \beta_0, \gamma_0}(x(t-1))$$

so treten die einzelnen Typen in der folgenden Reihenfolge in der Phasenebene bzw. im Verzweigungsdiagramm auf :



Berechnen wir nun die Abbildung $\tilde{S}$ in der Nähe dieser möglichen $\tilde{R}$ -Fixpunkte, so ergeben sich als Eigenwerte der Abbildung $\tilde{S} : \Delta^2 \rightarrow \Delta^2$ in der Nähe der periodischen Lösungen vom Typ

$$R_0 : \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$R_1 : \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad ; \quad \lambda_3 = \frac{2}{\alpha\beta} (\beta - \alpha)^2$$

$$R_2 : \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$R_3 : \quad + \quad \text{Satz 6.14}$$

$$R_4 : \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad ; \quad \lambda_3 = \frac{2}{\beta\gamma} (\gamma - \beta)^2$$

$$R_5 : \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Damit wird in der Nähe der periodischen Lösungen vom R_k -Typ ($0 \leq k \leq 5; k \neq 3$) kein Eigenwertverhalten erzeugt, das sich vom Eigenwertverhalten beim Zweistufen-Modell wesentlich unterscheidet: alle Eigenwerte sind positiv.

Allerdings ist in der Nähe periodischer Lösungen vom R_3 -Typ für die Abbildung $\tilde{S}$ jedes Eigenwertverhalten möglich (abhängig von $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$) wie der folgende Satz zeigt:

6.14 SATZ Sei zur Abkürzung $r := \frac{\beta}{\gamma}$ und $s := \frac{\alpha}{\beta}$.

Dann ist die Ableitung $D\tilde{S}$ der (affin linearen) Abbildung $\tilde{S}$ in der Nähe der periodischen Lösungen vom R_3 -Typ gegeben durch:

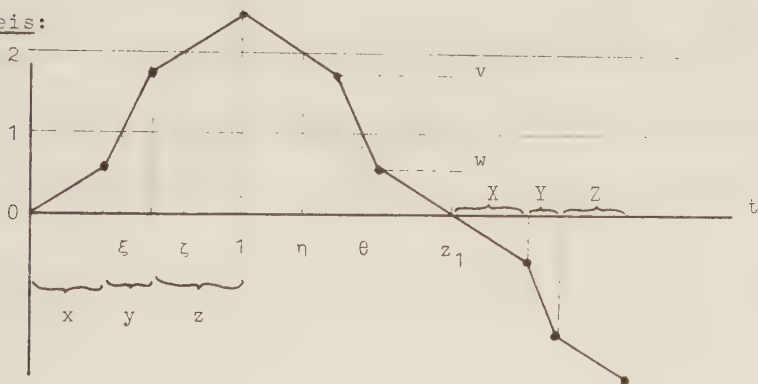
$$D\tilde{S} = \begin{pmatrix} r\alpha + \frac{1}{rs} - r - s - \frac{1}{s} & ; & \frac{1}{s} - r + rs - \frac{1}{s} & ; & 0 \\ -rs + r - \frac{1}{rs} + \frac{1}{r} & ; & 2 - r - \frac{1}{s} & ; & 0 \\ * & & * & ; & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Abbildung sind

$$\lambda_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \delta} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \delta} \quad ; \quad \lambda_3 = 0$$

$$\text{wobei } \sigma := 2(rs + \frac{1}{rs} - s - \frac{1}{s}) \quad \text{und} \quad \delta := \frac{2}{rs} (r-1)^2 (s-1)^2 .$$

Beweis:



Wählen wir (x, y, z) in der Nähe des $\tilde{R}_3$ -Fixpunktes $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ so ist die Knotenverteilung wie im Bild und man berechnet:

$$\xi = \frac{1 + (\beta - \gamma)x}{\beta} \quad ; \quad \zeta = \frac{2 + (\alpha - \gamma)x + (\alpha - \beta)y}{\alpha}$$

$$\|\phi\| = \phi(1) = (\gamma - \alpha)x + (\beta - \alpha)y + \alpha$$

Mit $v := x^\phi(\xi+1) = \|\phi\| - \alpha\xi$ und $w := x^\phi(\zeta+1) = \|\phi\| - \alpha\xi - \beta(\zeta - \xi)$ sind die Schnittpunkte η (bzw. θ) der Lösung x^ϕ mit den Niveaus $x \equiv 2$ (bzw. $x \equiv 1$) sowie die Nullstelle $z_1 > 1$ gegeben durch

$$\eta = 1 + \frac{\|\phi\| - 2}{\alpha} \quad ; \quad \theta = 1 + \xi + \frac{v-1}{\beta} \quad ; \quad z_1 = 1 + \zeta + \frac{w}{\gamma}$$

Die Koordinaten (X, Y, Z) des Bildpunktes von (x, y, z) unter $\tilde{\Sigma}$ sind damit :

$$X = \eta + 1 - z_1 \quad ; \quad Y = \theta + 1 - z_1 \quad ; \quad Z = 1 - X - Y$$

Differentiation nach x , y und z liefert :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 2 \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} - \frac{\gamma - \alpha}{\gamma} + \frac{\alpha - \beta}{\gamma} \frac{\beta - \gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\alpha - \gamma}{\alpha}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 2 \frac{\beta - \alpha}{\alpha} - \frac{\beta - \alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{\alpha - \beta}{\alpha}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = (1 - \frac{\alpha}{\beta}) \frac{\beta - \gamma}{\beta} + (\gamma - \alpha) (\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = (\beta - \alpha) (\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha})$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = * \quad ; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = *$$

Mit der abkürzenden Schreibweise $r := \frac{\beta}{\gamma}$, $s := \frac{\alpha}{\beta}$ ergibt sich hieraus die Matrix $D\tilde{S}$. Die Berechnung der Eigenwerte ist offensichtlich.

qed.

6.15 KOROLLAR Falls gilt: $\alpha > \beta > \gamma$, so sind alle Eigenwerte positiv.

Beweis: Es reicht zu zeigen, daß $\frac{r}{s} - s \geq 0$ ist.
Nun ist

$$0^2 \geq 4\delta$$

$$\therefore (rs + \frac{1}{rs} - s - \frac{1}{s})^2 \geq \frac{8}{rs} (r-1)^2 (s-1)$$

$$\therefore s(r-1) - \frac{1}{rs}(r-1) = -\frac{r}{rs} (r-1)^2 (s-1)^2 \quad (r \neq 1)$$

$$\therefore (s - \frac{1}{rs})^2 \geq \frac{2}{rs} (s-1)^2$$

$$\therefore \frac{1}{r^2 s^2} (rs^2 - 1)^2 \geq \frac{2}{rs} (s-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (rs^2 - 1)^2 \geq 2rs(s-1)^2$$

$$\Leftrightarrow r^2s^4 - 2rs^2 + 1 \geq 2rs^3 - 4rs^2 + 2rs$$

$$\Leftrightarrow r^2s^4 - 2rs^3 + 2rs^2 - 2rs + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 2r \frac{s^3 - s^2 + s}{s^4} + \frac{1}{s^4} \geq 0$$

Für festes s ist $p_s(r) := r^2 - 2r \frac{s^3 - s^2 + s}{s^4} + \frac{1}{s^4}$ eine Parabel mit Scheitel in $r = r_0 = \frac{s^3 - s^2 + s}{s^4} \geq 0$. Man überzeugt sich davon, daß für $s > 1$ und $r > 1$ gilt: $p_s(r) > 0$.

ged.

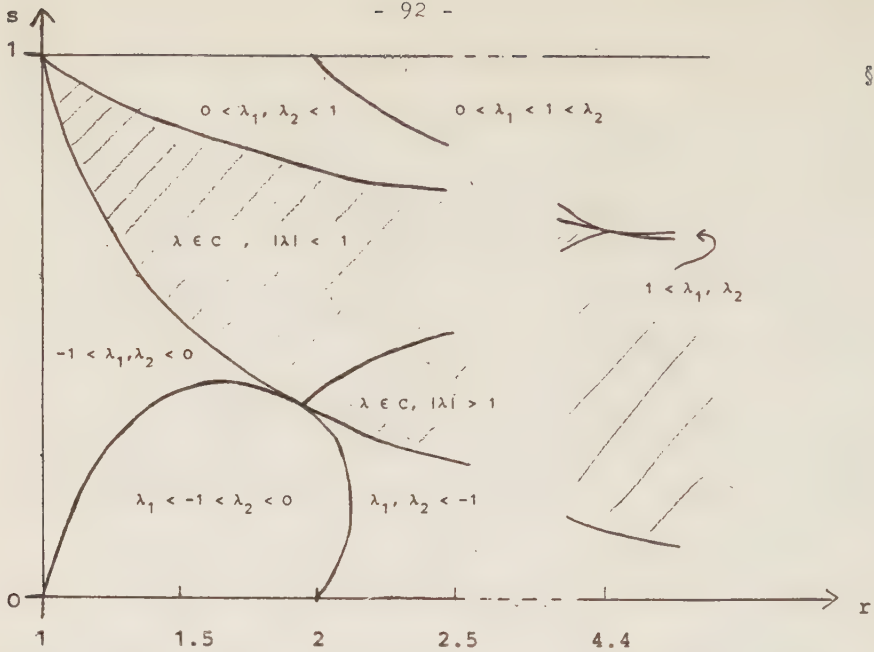
Zusammen mit dem Eigenwertverhalten der Abbildung $\tilde{\gamma}$ in der Nähe der anderen Lösungstypen folgt also, daß auch das Dreistufen-Modell bei einer Stufenanordnung $\alpha > \beta > \gamma$ keine durch Indexwechsel verursachte $R \rightarrow S^2$ -Verzweigung aufweist.

Als eigentlich interessanter Bereich im Hinblick auf dieses qualitative Phänomen stellt sich für das Dreistufen-Modell der Parameterbereich

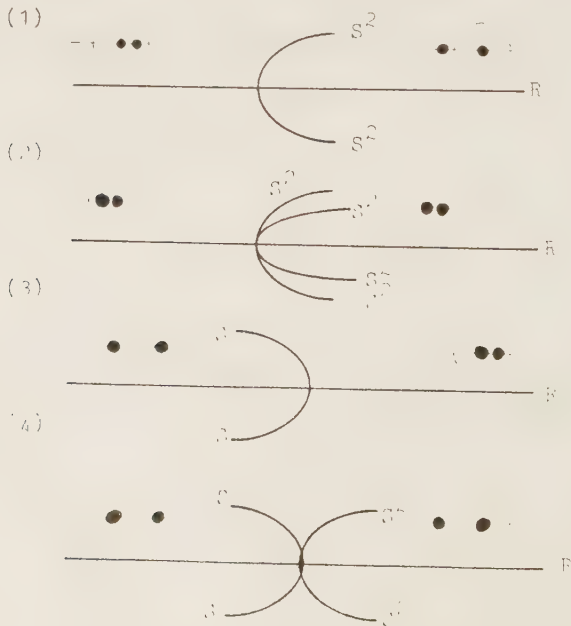
$$\alpha < \beta \quad \text{und} \quad \beta > \gamma$$

$$\text{bzw.} \quad s < 1 \quad \text{und} \quad r > 1$$

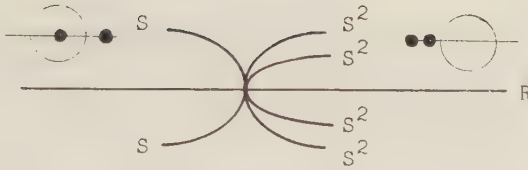
heraus. In diesem Bereich ergibt nun eine numerische Analyse folgendes Eigenwertverhalten:



Je nach Wahl der Parameter α, β und γ sind zum Beispiel die folgenden Verzweigungen vom Ast der periodischen Lösungen vom R_3 -Typ möglich :

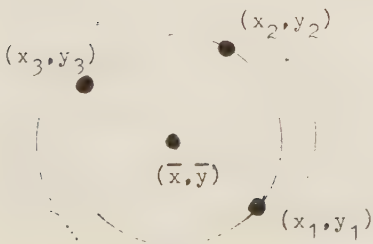
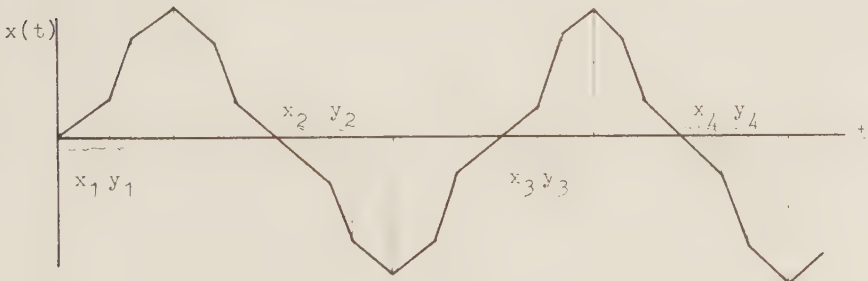


(5)



Insbesondere tritt auch der Fall auf, daß ein Eigenwert λ_1 der Abbildung $\mathfrak{S}$ den Einheitskreis bei -1 durchstößt. Damit kreuzt der Eigenwert λ_1^2 der Abbildung $\mathfrak{S}^2$ den Einheitskreis bei $+1$, und der Fixpunktindex des $\hat{R}_3$ -Fixpunktes ändert sich bezüglich $\mathfrak{S}^2$. Das heißt: $\mathfrak{S}^2$ -Fixpunkte zweigen von $\hat{R}_3$ -Fixpunkten ab. Die numerisch für Gleichung (2.13) gefundene $R \rightarrow S^2$ -Verzweigung ist demnach durch ein speziell gewähltes Dreistufen-Modell realisierbar.

Das Auftreten komplexer Eigenwerte $\lambda, \bar{\lambda}$ vom Betrag 1 bedeutet, daß es Parameterwerte (α, β, γ) gibt, für welche die Abbildung $\mathfrak{S}$ wie eine Drehung um den Winkel $2\pi\theta$ wirkt (wobei $\theta \in [0, 1)$ die Zahl ist, für die $e^{2\pi i\theta} = \lambda \in S^1$).



Drehung um den Winkel $2\pi\theta$

Je nachdem, ob θ rational oder irrational ist, führt die zu $(x_1, y_1, z_1) \in \Delta^2$ gehörende Anfangsfunktion $\phi \in \mathcal{M}_{\alpha, \beta, \gamma}$ zu einer periodischen oder quasiperiodischen Lösung x^ϕ .

Wir wollen diese Beobachtung für eine spezielle Parameterwahl präzisieren und als Verzweigungsergebnis formulieren.

6.16 SATZ Sei die nichtlineare Funktion f_α gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \text{sign}(x) \cdot \begin{cases} \alpha & ; \quad 0 < |x| \leq 1 \\ 4 & ; \quad 1 < |x| \leq 2 \\ 1.6 & ; \quad 2 < x \end{cases}$$

Dann gilt:

(1) Für $\alpha \in (1.88, 1.96)$ existiert ein Zweig periodischer Lösungen vom R_3 -Typ der Gleichung

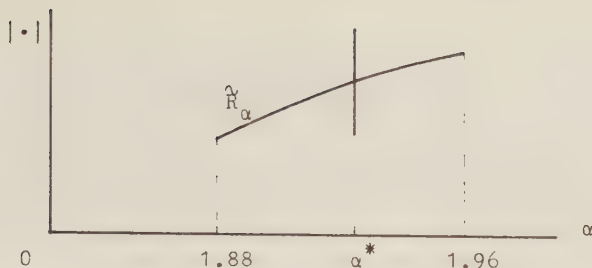
$$x'(t) = -f_\alpha(x(t-1))$$

(2) Die vom Verschiebeoperator S_α induzierte Abbildung $\mathcal{S}_\alpha$ ist in der Nähe dieser Lösungen (affin) linear mit Eigenwerten $\lambda(\alpha)$, $\overline{\lambda(\alpha)} \in \mathbb{C}$. $\lambda(\alpha)$ hängt stetig von α ab und es ist

$$|\lambda(1.88)| > 1 \quad \text{und} \quad |\lambda(1.96)| < 1$$

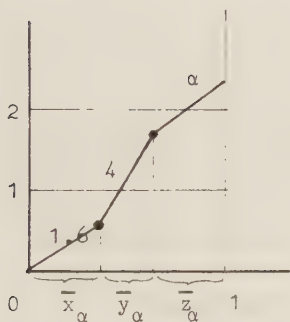
Insbesondere existiert ein $\alpha = \alpha^* \in (1.88, 1.96)$, so daß $|\lambda(\alpha^*)| = 1$ ($\alpha^* \approx 1.929$)

(3) Sei $\theta \in [0, 1)$ die Zahl, so daß $\lambda(\alpha^*) = e^{2\pi i \theta}$. Die Abbildung $\mathcal{S}_\alpha$ ist in einer Umgebung des $\mathcal{R}_3$ -Fixpunktes konjugiert zu einer Drehung um den Winkel $2\pi\theta$. Die korrespondierenden periodischen bzw. quasiperiodischen Lösungen (θ rational bzw. irrational) zweigen vertikal von den $\mathcal{R}_3$ -Fixpunkten ab.



Beweisskizze:

(a) Konstruktion des Kontinuums periodischer Lösungen vom R_3 -Typ



Man berechnet als Fixpunkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}(\alpha), \bar{y}(\alpha), \bar{z}(\alpha))$ der vom Operator R_α induzierten Abbildung $\tilde{R}_\alpha$:

$$\bar{x}(\alpha) = \frac{4 + \alpha}{1.6\alpha + 29.2} \quad ; \quad \bar{y}(\alpha) = \frac{8 - 0.4\alpha}{1.6\alpha + 29.2}$$

$$\bar{z}(\alpha) = 1 - \bar{x}(\alpha) - \bar{y}(\alpha)$$

Für $\alpha \in (1.88, 1.96)$ entspricht dieser Fixpunkt einer periodischen Lösung vom R_3 -Typ.

(b) Berechnung von $\tilde{S}_\alpha$ in einer Umgebung von $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

Da wir $\tilde{S}_\alpha$ in der Umgebung einer periodischen Lösung vom R_3 -Typ berechnen, ist die Linearisierung der Abbildung $\tilde{S}_\alpha$ mit ihren Eigenwerten durch Satz 6.14 bestimmt. Einsetzen der speziellen Parameterwerte $\beta = 4$, $\gamma = 1.6$ liefert die Behauptung über die Eigenwerte.

(c) Vertikale Verzweigung

Die spezielle Parameterwahl $\beta = 4$, $\gamma = 1.6$ gewährleistet, daß der $\tilde{R}_\alpha$ -Fixpunkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}(\alpha), \bar{y}(\alpha), \bar{z}(\alpha))$ für alle

$\alpha \in (1.88, 1.96)$ im Innern eines Affinitätsbereiches der Abbildung $\mathcal{S}_\alpha$ liegt. Die affin lineare Abbildung $\mathcal{S}_\alpha$ dreht damit aber jeden Punkt (x, y, z) , sofern er nur nah genug bei $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ liegt, um den Winkel $2\pi\theta$.

Das bedeutet aber, daß in α^* ein Kontinuum periodischer bzw. quasiperiodischer Lösungen (abhängig von Rationalität bzw. Irrationalität von θ) senkrecht von den periodischen Lösungen vom R_3 -Typ abzweigt.

ged.

6.17 BEMERKUNGEN

(1) Die Verzweigungsaussage des Satzes 6.16 beruht auf einer lokalen Berechnung der Abbildung $\mathcal{S}_\alpha$. Zur Beantwortung der Frage, ob und wie sich die Zweige der abzweigenden periodischen/quasiperiodischen Lösungen fortsetzen lassen, benötigt man mehr Kenntnisse ("globale" Informationen) über die Abbildung $\mathcal{S}_\alpha$, für die ein größerer Rechenaufwand betrieben werden muß.

(2) Mit der Kenntnis des durch Satz 6.14 genau beschriebenen Eigenwertverhaltens der Abbildung $\mathcal{S}_\alpha$ in der Nähe periodischer Lösungen vom R_3 -Typ lassen sich offensichtlich auch andere Beispiele (das heißt andere Parameter) für eine Verzweigung periodischer/quasiperiodischer Lösungen finden. Es muß nur gewährleistet sein, daß das R-Lösungskontinuum des Einparameterproblems (bei Fixierung der beiden anderen Parameter) in der Klasse der speziellen Lösungen (periodische Lösungen vom R_3 -Typ) bleibt, für die die Berechnung von $\mathcal{S}_\alpha$ durch Satz 6.14 gerechtfertigt ist.

KAPITEL II

=====

NICHTLINEARITÄTEN MIT MEHREREN NULLSTELLEN

=====

Hat die nichtlineare Funktion f mehr als eine Nullstelle, so ist die Lösung x^ϕ der Gleichung

$$(7.0) \quad x'(t) = - \alpha f(x(t-1))$$

zu einer monoton wachsenden Anfangsfunktion $\phi \in C[0,1]$ mit $\phi(0) = 0$ im allgemeinen nicht einfach oszillierend, das heißt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen z_n und z_{n+1} der Lösung x^ϕ liegt im allgemeinen mehr als nur ein Extremum. Insbesondere ist auch der Kegel P der monoton wachsenden Funktionen $\phi \in C[0,1]$ mit $\phi(0) = 0$ im allgemeinen nicht invariant unter einem Verschiebeoperator. Damit stellt sich das Problem, geeignete Mengen im Funktionenraum $C[0,1]$ zu finden, die der Dynamik der Gleichung (7.0) angepaßt sind und von einem (modifizierten) Verschiebeoperator invariant gelassen werden.

In diesem Fall scheint es also weitaus schwieriger zu sein, das Periodizitätsproblem für Gleichung (7.0) in ein angepaßtes Fixpunktproblem umzuformulieren.

Schränkt man sich auf spezielle periodische Lösungen (periodische Lösungen vom R-Typ) ein, so gibt die Phasenebenen-Technik einen ersten Einblick in die Lösungsvielfalt. Wir studieren dies in einem Modell-Fall in § 7.

In gewissen Parameterbereichen spielen Lösungen dieses speziellen Typs aber insofern eine untergeordnete Rolle, als "fast alle" Anfangsfunktionen zu Lösungen führen, die nicht von diesem speziellen Typ sind.

Aus diesem Grund untersuchen wir in § 8 die Lösungen zu besonders einfachen Anfangsfunktionen. Für geeignete Parameter lassen sich die zugehörigen Lösungen explizit angeben. Am Beispiel dieser einfachen Anfangsfunktionen versteht man wenigstens partiell den (in Abhängigkeit vom Parameter α) sukzessiven Übergang von "periodischen Lösungen" zu "periodischen Lösungen zweiter Art".

Zugleich findet man bei dieser Analyse eine geeignete Menge von Funktionen ("Zacken"), durch die sich zwar nicht alle Lösungen der Gleichung (7.0), aber doch "hinreichend viele" beschreiben lassen. Die Menge dieser Anfangsfunktionen ist homöomorph zu einem Intervall. Die Dynamik der Gleichung (7.0) auf diesen Anfangsfunktionen läßt sich durch eine Intervallabbildung beschreiben, die jedoch nicht (wie in Kapitel I, § 5) die endlichdimensionale Realisierung eines Verschiebeoperators ist. In § 9 berechnen wir diese Intervallabbildung und zeigen, daß sie sich chaotisch im Sinne von LI und YORKE verhält. Das Lösungsverhalten der Gleichung (7.0) erweist sich dabei sogar als komplexer als das der Gleichung (4.2) : es lassen sich wenigstens drei verschiedene Typen periodischer und aperiodischer Lösungen unterscheiden, bedingt durch "Buckel" und zusätzliche Nullstellen der Nichtlinearität f .

Somit ergibt sich selbst bei Beschränkung auf spezielle Anfangsfunktionen eine kaum zu überschauende Lösungsvielfalt. Die erzielten Ergebnisse dürfen aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß eine vollständige Beschreibung der Dynamik der Gleichung (7.0) (wie sie im Fall der Gleichung (4.2) möglich war) aussteht. Einige daraus resultierende Fragen wie: numerische Lösung solcher Gleichungen, Auswahl geeigneter Lösungsoperatoren sowie invarianter Mengen und grundsätzliche Fragen einer Modell-Bildung wollen wir in § 10 abschließend mehr aufwerfen als daß wir sie beantworten könnten.

§ 7

Spezielle periodische Lösungen

Wir wählen wieder eine Treppenfunktion als Modell-Funktion.
Als Modellierung der Gleichung

$$(7.1) \quad x'(t) = \delta - \alpha \sin x(t-1)$$

(vgl. /10/, /39/) bietet sich die Gleichung

$$(7.2) \quad x'(t) = -\alpha f(x(t-1))$$

mit

$$(7.3) \quad f(x) = \text{sign}(\sin \pi x)$$

an. Mit dieser Nichtlinearität hat die Differentialgleichung
(7.2) zunächst für alle $\alpha > 0$ die stationären Lösungen $\bar{x}_z$
mit $\bar{x}_z(t) = z \quad (z \in \mathbb{Z})$.

Zu der Gleichgewichtslösung $\bar{x}_0 \equiv 0$ existiert eine periodische
Lösung der Periode 4 (für $0 < \alpha < 1$):

$$x_0(t) = \begin{cases} \alpha t & ; 0 \leq t \leq 1 \\ \alpha(2-t) & ; 1 \leq t \leq 3 \\ \alpha(t-4) & ; 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

(periodisch fortgesetzt). Entsprechend erhält man zu den Gleich-
gewichtslösungen, $\bar{x}_{2z} \equiv 2z$ die periodischen Lösungen

$$x_{2z}(t) = x_0(t) + 2z$$

Zu der stationären Lösung $\bar{x}_1 \equiv 1$ existiert eine periodische
Lösung der Periode $4/3$ (für $0 < \alpha < 3$):

$$x_1(t) = \begin{cases} \alpha t & ; 0 \leq t \leq 1/3 \\ \alpha(\frac{2}{3} - t) & ; 1/3 \leq t \leq 1 \\ \alpha(t - \frac{4}{3}) & ; 1 \leq t \leq 4/3 \end{cases}$$

Diese liefert periodische Lösungen x_{2z+1} mit $x_{2z+1}(t) = x_1(t) + 2z$, die um die Gleichgewichtslösungen $x \equiv 2z+1$ oszillieren.

Die periodischen Lösungen x_{2z+1} ($z \in \mathbb{Z}$) sind schnell schwingende Lösungen bezüglich der stationären Lösungen $x \equiv 2z+1$: $(2z+1)$ -stellen der Lösung sind nicht durch einen Mindestabstand der Länge 1 voneinander getrennt.

Ist $\alpha > 1$, so ist bei Vorgabe einer Anfangsfunktion $\phi \in P^*$ der Verlauf der Lösung x^ϕ nur schwer zu charakterisieren. Zwar ist x^ϕ wieder stückweise linear, jedoch ist $S_\alpha(P^*)$ schwierig (wenn nicht unmöglich) zu berechnen. Damit scheitert zunächst die Reduktion des Periodizitätsproblems auf ein Fixpunktproblem für eine Simplex-Abbildung wie in Kapitel I. Zum andern wird aber bei der Berechnung einiger Lösungen auch klar, daß der Verschiebeoperator S_α der Dynamik der Lösungen wenig angepaßt ist. Es sind also alternative Konzepte zu entwickeln, um einen Einblick in die Lösungsvielfalt bei Gleichungen des Typs (7.1) bzw. (7.2) zu gewinnen.

Wir beschränken uns auf Lösungen, die um 0 oszillieren, lassen also solche, die daraus durch Translation hervorgehen, unberücksichtigt. Unter diesen betrachten wir in diesem § nur solche, die mit Fixpunkten des Operators R_α identifiziert werden können, also periodische Lösungen vom R-Typ. Diese speziellen periodischen Lösungen können wieder (unabhängig von der Bedingung $xf(x) > 0$ für $x \neq 0$) mit speziellen Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen identifiziert werden.

7.4 LEMMA Es sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $g(-x) = -g(x)$.

Es sei $(x(t), y(t))$ eine periodische Lösung der Periode p des Systems

$$x'(t) = -g(y(t))$$

$$y'(t) = g(x(t))$$

so daß die Kurve $\Gamma(t) := \{(x(t), y(t)) | 0 \leq t \leq p\} \subset \mathbb{R}^2$ den Nullpunkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ im Innern enthält (im Sinne des Jordanschen Kurvensatzes) und für wachsendes t die Ebene im mathematisch positiven Sinn durchläuft.

Dann ist x periodische Lösung vom R-Typ der Gleichung

$$x'(t) = -\frac{p}{4} g(x(t-1))$$

die um $x \equiv 0$ oszilliert.

Beweis: Man überprüft, daß die Identifikation in /19/ nur von der Ungeradheit von g , nicht aber von der Vorzeichenbedingung $xg(x) > 0$ für $x \neq 0$ abhängt.

qed.

Die Periodenabbildung für das System gewöhnlicher Differentialgleichungen liefert damit wieder ein Verzweigungsdiagramm für periodische Lösungen vom R-Typ der Gleichung (7.2).

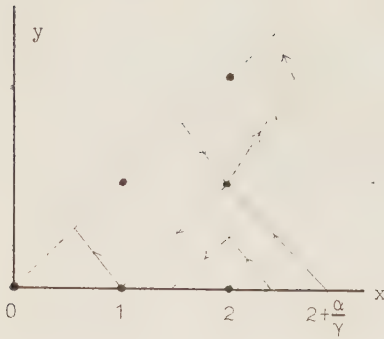
Zur Illustration bestimmen wir periodische Lösungen vom R-Typ und Verzweigungsdiagramm für Gleichung (7.2) mit der Nichtlinearität

$$(7.5) \quad g(x) = g_{\alpha, \beta, \gamma}(x) = \begin{cases} \alpha & ; x \in (0, 1) \\ -\beta & ; x \in (1, 2) \\ \gamma & ; x \in (2, \infty) \\ 0 & ; x \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

$$g(-x) = -g(x)$$

Berechnen wir zunächst die Periodenabbildung für das assoziierte Differentialgleichungssystem:

1. Fall : $\alpha = \beta$



(a) Für Anfangswerte $(x,0) := (x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$ mit $0 < x < 1$ ist die Periode

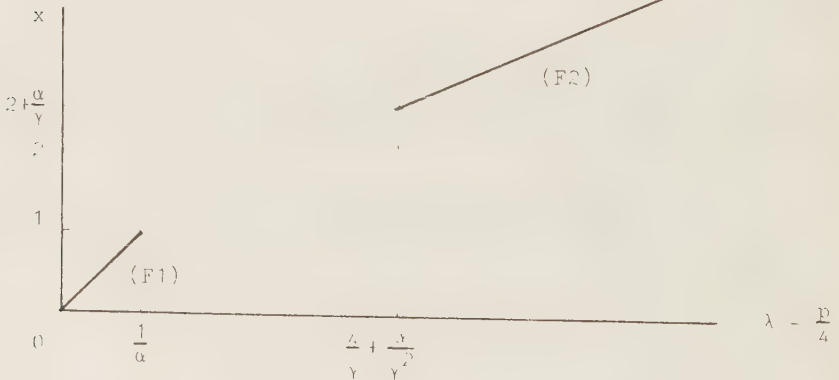
$$p(x) = \frac{4}{\alpha} x$$

(b) Für Anfangswerte $(x,0)$ mit $1 < x < 2 + \frac{\alpha}{\gamma}$ gibt es keine Orbits, die $(0,0)$ im Innern enthalten.

(c) Für Anfangswerte $(x,0)$ mit $x > 2 + \frac{\alpha}{\gamma}$ ist die Periode

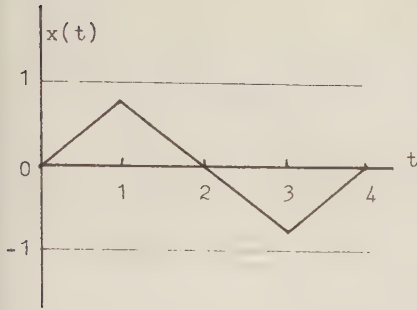
$$p(x) = \frac{4}{\gamma} (x + 2)$$

Daraus ergibt sich das folgende Verzweigungsdiagramm für periodische Lösungen vom R-Typ:



Die zugehörigen periodischen Lösungen vom R-Typ haben die Form:

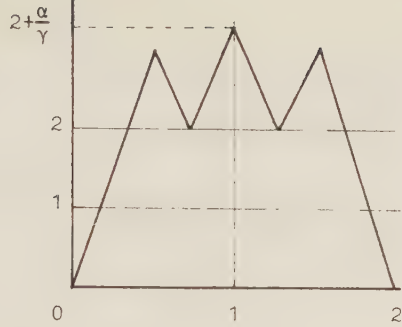
(F1)



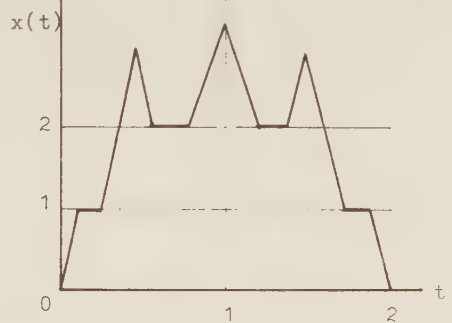
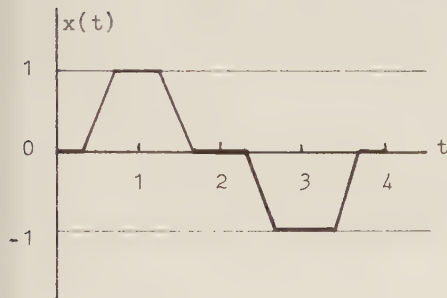
- 103 -

(F2)

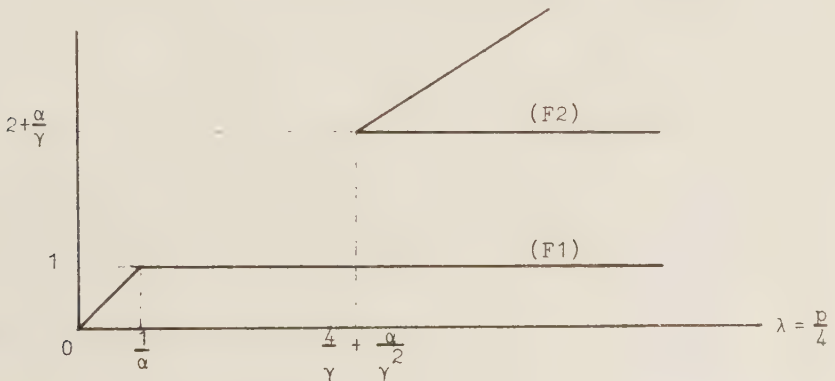
§ 7



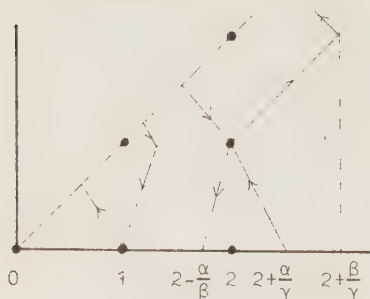
Die Zweige im Verzweigungsdiagramm lassen sich fortsetzen, wenn man berücksichtigt, daß auch der Anstieg 0 in den Lösungen auftreten kann. Als Fortsetzung der Lösungen vom Typ (F1) bzw. (F2) ergeben sich dann:



Das heißt: das Verzweigungsdiagramm kann auf die folgende Art komplettiert werden:



2. Fall : $\alpha < \beta$



(a) $x \in (0, 1)$: $p(x) = \frac{4}{\alpha} x$

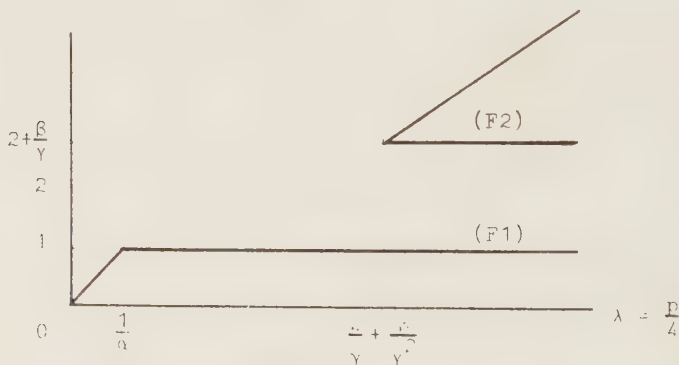
(b) $x \in (1, 2 - \frac{\alpha}{\beta})$: $p(x) < 0$

(c) $x \in (2 - \frac{\alpha}{\beta}, 2 + \frac{\alpha}{\gamma})$: kein Orbit um $(0, 0)$

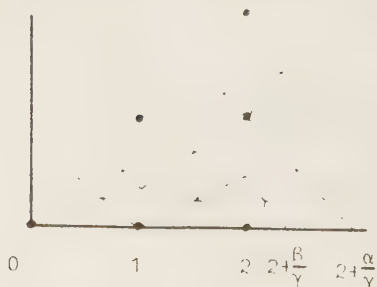
(d) $x \in (2 + \frac{\alpha}{\gamma}, \infty)$:

$$p(x) = \frac{4}{\gamma} \left(t + 2 - \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} \right)$$

Unter Beachtung der Tatsache, daß wegen $\alpha < \beta$ die kleinstmögliche Amplitude der Lösungen auf dem oberen Lösungsast $2 + \frac{\beta}{\gamma}$ (statt $2 + \frac{\alpha}{\gamma}$) ist, ergibt sich qualitativ das gleiche Verzweigungsdiagramm wie im 1. Fall :



3. Fall : $\alpha > \beta$



(a) $x \in (0, 1)$: $p(x) = \frac{4}{\alpha} x$

(b) $x \in (1, 2 + \frac{\beta}{\gamma})$: kein Orbit um $(0, 0)$

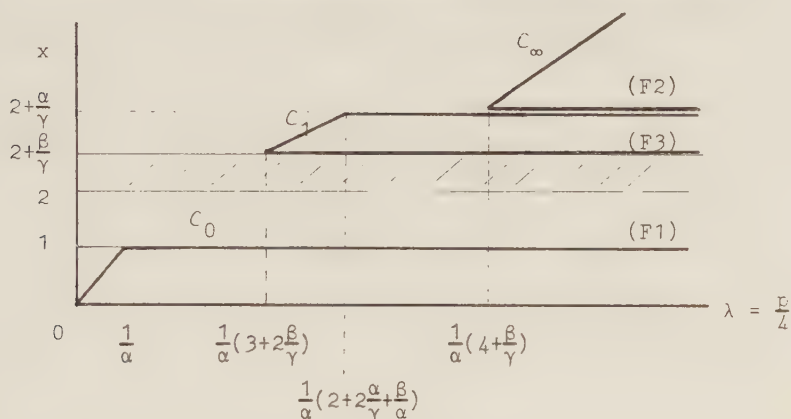
(c) $x \in (2 + \frac{\beta}{\gamma}, 2 + \frac{\alpha}{\gamma})$:

$$p(x) = \frac{4}{\alpha} (2\alpha - \gamma)x + 2\gamma + \beta - \alpha$$

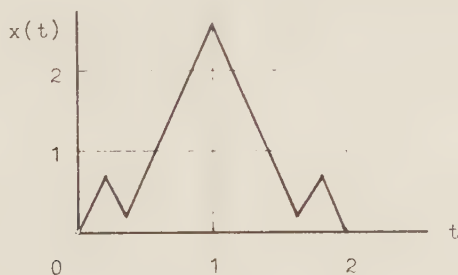
$$(d) \quad x \in (2 + \frac{\alpha}{\gamma}, \infty) :$$

$$p(x) = \frac{\lambda}{\gamma} (x + 2 - \frac{\alpha - \beta}{\gamma})$$

Der Periodenabbildung entspricht das Verzweigungsdiagramm:



Neben den Lösungszweigen mit Lösungen des Typs (F1) und (F2) existieren in diesem Fall also noch Lösungen eines neuen Typs (F3) :



Ähnlich wie die Lösungszweige mit Lösungen des Typs (F1) und (F2) kann auch dieser Lösungszweig fortgesetzt werden, wenn man berücksichtigt, daß auch der Anstieg 0 in der Lösung auftreten kann.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

7.6 SATZ Sei g die in (7.5) definierte Nichtlinearität.

Seien $c_1, c_2 > 2$ die durch die Bedingungen

$$\int_0^{c_1} g(x) dx = \int_0^1 g(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_2^{c_2} g(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$$

definierten Konstanten. Sei $\|x\| := \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |x(t)|$ für $x \in C(\mathbb{R}^+)$

Dann gilt für die Gleichung

$$(*) \quad x'(t) = -\lambda g(x(t-1)) \quad :$$

(1) Gleichung $(*)$ besitzt keine periodische Lösung vom R-Typ x , für die gilt

$$1 < \|x\| < \min \{c_1, c_2\}$$

(2) Es existiert ein Kontinuum C_0 periodischer Lösungen vom R-Typ der Gleichung $(*)$, das in $(\lambda, x) = (0, 0)$ von der trivialen Lösung $x \equiv 0$ abzweigt.

Für alle $x \in C_0$ gilt: $\|x\| \leq 1$.

(3) Es existiert ein Kontinuum C_∞ periodischer Lösungen vom R-Typ der Gleichung $(*)$ derart, daß für alle $x \in C_\infty$ gilt: $\|x\| \geq \max \{c_1, c_2\}$.

(4) Falls gilt: $\int_0^2 g(x) dx > 0$, so ist $c_1 < c_2$. In diesem Fall existiert ein weiteres Kontinuum C_1 periodischer Lösungen vom R-Typ der Gleichung $(*)$.

Für alle $x \in C_1$ gilt: $c_1 \leq \|x\| \leq c_2$.

Beweis: Klar nach dem Vorhergehenden.

qed.

7.7 BEMERKUNGEN

(1) Das zuvor diskutierte Beispiel der Funktion $g = g_{\alpha, \beta, \gamma}$ zeigt, daß es innerhalb der Klasse der periodischen Lösungen vom R-Typ der Gleichung (*) eine Feinstruktur gibt. Entscheidende Charakteristika der periodischen Lösungen wie Anzahl und Lage der Minima / Maxima werden durch den Operator R nicht unterschieden.

(2) Bei Randwertaufgaben zur Gleichung $-u'' = \lambda f(u)$ erhält man ähnliche Verzweigungsaussagen wie in Satz 7.6, wenn f mehrere Nullstellen hat (vgl. /33/). Allerdings ist die Lösungsvielfalt nicht so reichhaltig. Aufgrund der Struktur der Gleichung erzeugen Nullstellen von f in der (u, u') -Phasenebene nur singuläre Punkte auf der u -Achse. Ein dem Kontinuum C_1 in Satz 7.6 vergleichbares Lösungskontinuum gibt es deshalb bei Randwertaufgaben des obigen Typs nicht.

(3) Die Tatsache, daß die "Sperrzone" $1 < ||x|| < \min\{c_1, c_2\}$ im Verzweigungsdiagramm durch eine Integralbedingung und nicht durch die Nullstelle 2 der Funktion g bestimmt ist, ermöglicht auch bei Delay-Gleichungen die Charakterisierung sogenannter "numerisch irrelevanter Lösungen", die bei der numerischen Berechnung von Lösungen auftreten (vgl. /31/).

(4) Hat die nichtlineare Funktion f mehr Nullstellen als die zuvor diskutierte Funktion g , so wird die Zahl der möglichen Lösungen noch größer, die Verzweigungsdiagramme und die Struktur der periodischen Lösungen vom R-Typ komplizierter. Für die uns interessierende Nichtlinearität (7.3) gilt allerdings: $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Im Sinne von Satz 7.6 stellt diese Funktion damit einen Grenzfall dar: die Kontinua C_1 und C_∞ existieren nicht.

§ 8

Periodische Lösungen zweiter Art

Das folgende Lemma zeigt, daß sich die für die "glatte" Gleichung (7.1) bekannten Resultate (/10/) in der Modell-Gleichung (7.2) widerspiegeln:

8.1 LEMMA

(1) Für alle $\alpha > 0$ existiert eine nichttriviale periodische Lösung vom R-Typ x_α der Gleichung (7.2), so daß

$$||| x_\alpha ||| = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |x_\alpha(t)| \leq 1$$

(2) Für alle $\alpha \geq 2$ existiert eine periodische Lösung zweiter Art x_α der Gleichung (7.2).

Dabei heißt eine Lösung x der Gleichung (7.2) "periodische Lösung zweiter Art", wenn es Konstanten $C \neq 0$ und $p > 0$ gibt, so daß für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $x(t+p) = x(t) + C$.

Beweis:

(1) Sei $\phi_\alpha \in C[0,1]$ definiert durch $\phi_\alpha(t) := \alpha t$ ($0 \leq t \leq 1$) für $0 < \alpha \leq 1$. Für $\alpha \geq 1$ sei ϕ_α definiert durch

$$\phi_\alpha(t) := \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leq t \leq \frac{\alpha-1}{2\alpha} \\ \alpha t - \frac{\alpha-1}{2} & ; \quad \frac{\alpha-1}{2\alpha} \leq t \leq \frac{\alpha+1}{2\alpha} \\ 1 & ; \quad \frac{\alpha+1}{2\alpha} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Man sieht unmittelbar, daß ϕ_α Anfangsfunktion einer periodischen Lösung $x_\alpha = x^\phi_\alpha$ mit den beschriebenen Eigenschaften ist.

(2) Definiere $\psi_\alpha \in C[0,1]$ durch

$$\psi_\alpha(t) := \begin{cases} \alpha t & ; \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{\alpha} \\ 1 & ; \quad \frac{1}{\alpha} \leq t \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ \alpha(t-1) + 2 & ; \quad \frac{\alpha-1}{\alpha} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

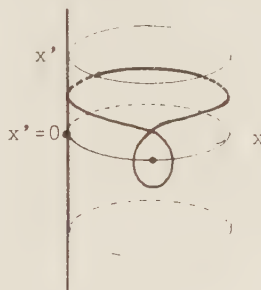
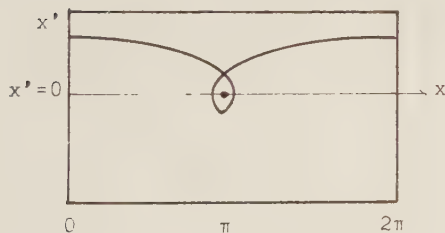
Die zur Anfangsfunktion ψ_α gehörende Lösung $\tilde{x}_\alpha := x^\psi_\alpha$ der Gleichung (7.2) erfüllt die Beziehung

$$\tilde{x}_\alpha(t+2) = \tilde{x}_\alpha(t) + 2$$

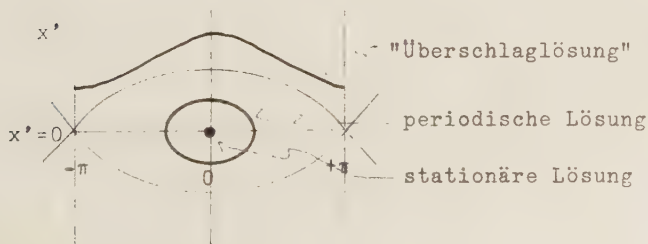
und ist damit eine periodische Lösung zweiter Art.

qed.

8.2 BEMERKUNG : Gleichung (7.1) ist ein mathematisches Modell für "phase locked loops" mit Zeitverzögerung (vgl. /10/, /39/). $x(t) \in [0, 2\pi)$ ist die zeitabhängige Phasenverschiebung. In dem der Gleichung angepaßten "zylindrischen" Phasenraum, der aus der üblichen (x, x') -Phasenebene durch Identifikation der $x(t)$ -Werte mod 2π hervorgeht, sind periodische Lösungen zweiter Art Lösungen, die sich "um den Zylinder herumwinden" :



(vgl. /39/). Periodische Lösungen zweiter Art stellen somit in gewisser Weise ein Analogon zu "Überschlaglösungen" bei der Pendelgleichung $x'' + \sin x = 0$ dar (vgl. /17/).



Wir wollen im folgenden der Frage nachgehen, ob sich der Zweig der periodischen Lösungen zweiter Art, der für $\alpha \geq 2$ existiert, in den Parameterbereich $\alpha < 2$ fortsetzt. Damit hängt die Frage zusammen, ob es in Abhängigkeit vom Parameter α einen Übergang von periodischen Lösungen zu periodischen Lösungen zweiter Art gibt. Selbst im Fall der Modell-Gleichung (7.2) erscheint eine vollständige Beantwortung dieser Frage aber äußerst schwierig. Um wenigstens Teilantworten zu erhalten, beschränken wir uns zunächst auf besonders einfache Anfangsfunktionen $\chi_\alpha \in C[0,1]$, definiert durch $\chi_\alpha(t) := \alpha t$ für $t \in [0,1]$.

8.3 SATZ (Übergang von periodischen Lösungen zu periodischen Lösungen zweiter Art)

Seien die Folgen $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha^* = \frac{3}{2} < \dots < \beta_1 < \beta_0 = 2$$

rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{4\alpha_n}{2\alpha_n + 1} & \beta_{n+1} &= \frac{4\beta_n}{2\beta_n + 1} \\ \alpha_0 &= 1 & \beta_0 &= 2 \end{aligned}$$

Dann gilt :

(a) Für $\alpha = \alpha_n$ ist die Anfangsfunktion χ_α , die definiert ist durch $\chi_\alpha(t) := \alpha t$ ($0 \leq t \leq 1$) Segment einer (n+1)-Zacken-Lösung das heißt einer periodischen Lösung $x^{(n+1)}$ der Gleichung (7.2) mit den folgenden Eigenschaften:

(a₁) $x^{(n+1)}$ ist langsam schwingend bezüglich $x \equiv 0$, schnell schwingend bezüglich $x \equiv +1$ und $x \equiv -1$ *).

(a₂) Sei $z > 1$ die kleinste positive Nullstelle der Lösung $x^{(n+1)}$. Dann gibt es $n+1$ Punkte $t_0, \dots, t_n$ mit $1 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < z$, in denen $x^{(n+1)}$ ein lokales Maximum $M_i := x^{(n+1)}(t_i)$ annimmt, und es ist

$$M_0 = \alpha > M_1 > \dots > M_n = 1$$

(a₃) $x^{(n+1)}(z+t) = -x^{(n+1)}(t)$, das heißt χ_α ist ein Fixpunkt des Verschiebeoperators S_α .

(b) Für den Parameterwert $\alpha = \alpha^* = \frac{3}{2}$ führt die Anfangsfunktion χ_α zu einer bezüglich $x \equiv 1$ schnell schwingenden periodischen Lösung der Periode $4/3$.

(c) Für $\alpha = \beta_n$ ist χ_α Anfangsfunktion einer (n+1)-Zakken-Lösung zweiter Art, das heißt einer periodischen Lösung zweiter Art $\tilde{x}^{(n+1)}$ der Gleichung (7.2) mit den folgenden Eigenschaften:

(c₁) $\tilde{x}^{(n+1)}$ ist langsam schwingend bezüglich der stationären Lösungen $x \equiv 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$), schnell schwingend bezüglich der stationären Lösungen $x \equiv 2k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(c₂) Sei $\tilde{z} := \min \{z > 1 \mid \tilde{x}^{(n+1)}(z) = 2\}$. Dann gibt es Punkte $(\tilde{t}_i)_{1 \leq i \leq n}$ mit $1 < \tilde{t}_1 < \dots < \tilde{t}_n < \tilde{z}$, in denen $\tilde{x}^{(n+1)}$ ein lokales Minimum $m_i := \tilde{x}^{(n+1)}(\tilde{t}_i)$ annimmt, und es ist

$$m_1 = \alpha - 1 < \dots < m_n = 1$$

(c₃) $\tilde{x}^{(n+1)}(\tilde{z}+t) = \tilde{x}^{(n+1)}(t) + 2$ für alle $t > 0$.

*) Eine Lösung x der Gleichung (7.2) heißt langsam schwingend bezüglich einer stationären Lösung $x \equiv N$, wenn für zwei aufeinanderfolgende N -stellen z_i, z_{i+1} der Lösung x gilt: $z_{i+1} > z_i + 1$. Eine Lösung, die nicht langsam schwingend (bzgl. N) ist, heißt schnell schwingend (bzgl. N).

Beweis: Die Lösung x^{χ_α} der Gleichung (7.2) zur Anfangsfunktion χ_α ist stückweise linear und kann für gewisse Parameterwerte α explizit berechnet werden.

(a) Konstruktion der (n+1)-Zacken-Lösung

Falls $\alpha > 1$ ist, so existiert genau ein $z_0 \in (0,1)$ derart, daß $\chi_\alpha(z_0) = 1$. Das Segment $x^{\chi_\alpha}_{z_0}$ liegt in der Funktionenmenge

$$M_\alpha := \{ \phi \in C[0,1] \mid \phi(t) = \begin{array}{ll} \alpha t + 1 & ; t \in [0, y] \\ -\alpha t + 1 + 2\alpha y & ; t \in [y, 1] \end{array} ; 0 \leq y \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \}$$

der "Zacken" mit Anstieg $+\alpha$ bzw. $-\alpha$. Da $\alpha \leq 2$ ist, existiert für jedes $\phi \in M_\alpha$ ein Punkt $z_1 \in (0,1]$, so daß $\phi(z_1) = 1$. Auf der Menge M_α definieren wir einen Verschiebeoperator σ_α wie folgt:

$$\sigma_\alpha : M_\alpha \rightarrow M_\alpha$$

$$\phi \mapsto \begin{cases} x^{\phi}_{z_2}, & \text{falls ein } z_2 > z_1 \text{ existiert,} \\ & \text{so daß } x^{\phi}(z_2) = 1 \\ \phi_0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei bezeichne $\phi_0 \in M_\alpha$ die Funktion mit konstantem Anstieg $\phi_0' = -\alpha$ (deren Koordinate $y = 0$ ist).

Vermöge der Koordinate y ist M_α homöomorph zum Intervall $I_\alpha := [0, \frac{\alpha-1}{\alpha}]$. Der Verschiebeoperator σ_α induziert eine Abbildung $\tilde{\sigma}_\alpha : I_\alpha \rightarrow I_\alpha$. Für $y \in [\frac{1}{4}, \frac{\alpha-1}{\alpha}]$ ($\neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{4}{3}$) berechnet man $\tilde{\sigma}_\alpha(y) = 4y - 1$.

Sei $\tilde{\rho}_\alpha := (\tilde{\sigma}_\alpha|_{[\frac{1}{4}, \frac{\alpha-1}{\alpha}]})^{-1}$ die Umkehrabbildung, also $\tilde{\rho}_\alpha(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ für $x \in [0, \frac{2\alpha-4}{\alpha}]$.

Die Werte M_j sind gegeben durch $M_j = \alpha \tilde{\sigma}_\alpha^{-1}(y) + 1$. Die Eigenschaft $M_{n+1} = 1$ der (n+1)-Zacken-Lösung ist damit eine Bedingung an y , nämlich: $\tilde{\sigma}_\alpha^{-1}(y) = 0$ oder $y = \tilde{\rho}_\alpha^{-1}(0) =: y_n$.

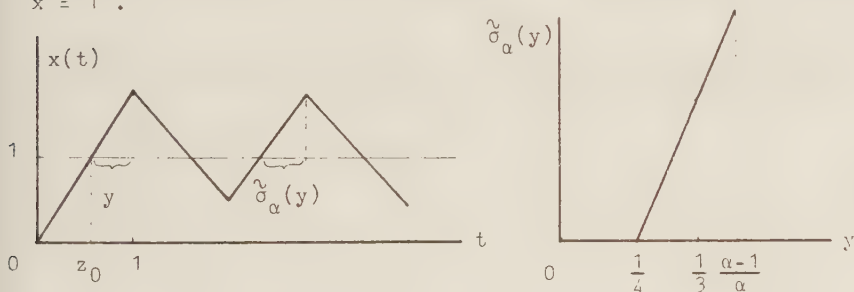
Das liefert für die Werte y_n die Rekursionsformel

$$y_{n+1} = \frac{1}{4} y_n + \frac{1}{4} \quad ; \quad y_0 = 0$$

Da für die Anfangsfunktion χ_α die Koordinate des Segments $x_{z_0}^{\chi_\alpha}$ gerade $y = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ ist, liefert dies für die Werte α_n die Rekursionsformel

$$\alpha_{n+1} = \frac{4\alpha_n}{2\alpha_n + 1} \quad ; \quad \alpha_0 = 1$$

(b) Für $\alpha = \alpha^* = \frac{3}{2}$ ist $y = y^* = \frac{\alpha^*-1}{\alpha^*} = \frac{1}{3}$ Fixpunkt der Abbildung $\tilde{\sigma}_\alpha$. Dieser Fixpunkt y^* entspricht einem Fixpunkt ϕ^* des Verschiebeoperators σ_α , das heißt einer schnell schwingenden periodischen Lösung bezüglich der stationären Lösung $x \equiv 1$.



(c) Konstruktion der $(n+1)$ -Zacken-Lösung zweiter Art

Die Werte m_i sind gegeben durch $m_i = 1 - \alpha(1 - 2\tilde{\sigma}_\alpha^i(y))$.

m_n ist gleich 1 genau dann, wenn $1 - 2\tilde{\sigma}_\alpha^n(y) = 0$, das heißt wenn $\tilde{\sigma}_\alpha^n(y) = \frac{1}{2}$. Das liefert: $y = \tilde{y}_n = \tilde{\sigma}_\alpha^n(\frac{1}{2})$.

Über die Beziehung $y = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ erhält man hieraus für β_n die gleiche Rekursionsformel wie für α_n mit Anfangswert $\beta_0 = 2$.

qed.

Wir haben die $(n+1)$ -Zacken-Lösung $x^{(n+1)}$ im Parameterwert $\alpha = \alpha_n$ mit einem Fixpunkt des Verschiebeoperators S_α identifiziert. Der folgende Satz zeigt, daß dieser spezielle Fixpunkt zu einem Kontinuum C_n von S_α -Fixpunkten gehört, deren Fixpunktindex bezüglich der Abbildung S_α^2 sich im Punkt $\alpha = \alpha_n$ von $+1$ auf -1 ändert. Das bedeutet aber, daß in den Parametern α_n S_α^2 -Fixpunkte von den S_α -Fixpunkten abzweigen.

8.4 SATZ Sei $n \geq 1$. Es existieren Parameter α_n^- , α_n^+ mit $\alpha_n^- < \alpha_n < \alpha_n^+$ und eine Abbildung

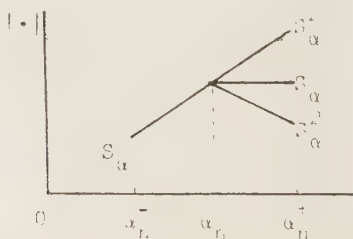
$$\psi : (\alpha_n^-, \alpha_n^+) \rightarrow C[0,1]$$

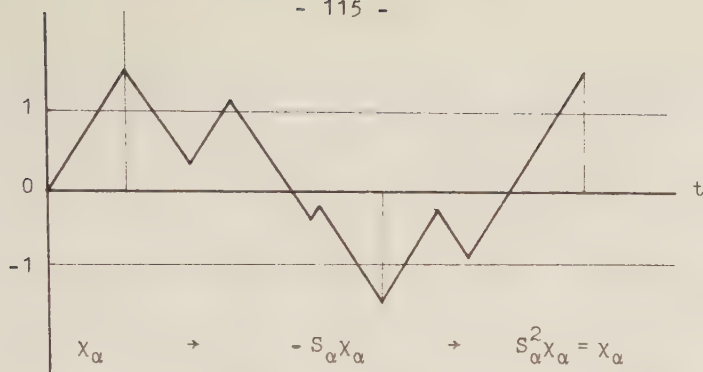
$$\alpha \mapsto \psi(\alpha) =: \psi_\alpha$$

derart, daß $S_\alpha \psi_\alpha = \psi_\alpha$ für alle $\alpha \in (\alpha_n^-, \alpha_n^+)$.

Für $\alpha \in (\alpha_n^-, \alpha_n)$ ist $\psi_\alpha = \chi_\alpha$.

Der Fixpunktindex des S_α -Fixpunktes ψ_α bezüglich S_α^2 ist $+1$ für $\alpha \in (\alpha_n^-, \alpha_n)$ und -1 für $\alpha \in (\alpha_n, \alpha_n^+)$. Insbesondere zweigen Fixpunkte von S_α^2 in $\alpha = \alpha_n$ von den S_α -Fixpunkten ab.





Beweis: Wir definieren eine Funktionenmenge Q_α folgendermaßen:

$$Q_\alpha := \{ \psi \in C[0,1] \mid \psi(t) = \begin{cases} at & ; t \in [0, \frac{\alpha-1}{\alpha} - y] \\ -at + 2(\alpha-1-\alpha y) & ; t \in [\frac{\alpha-1}{\alpha} - y, \frac{\alpha-1}{\alpha}] \\ at - 2\alpha y & ; t \in [\frac{\alpha-1}{\alpha}, 1] \end{cases} ; 0 \leq y \leq \frac{\alpha-1}{2\alpha} \}$$

Mit y als Koordinate ist Q_α homöomorph zum Intervall $I_\alpha := [0, \frac{\alpha-1}{2\alpha}]$. Beachte, daß $x_\alpha \in Q_\alpha$ ($y=0$)!

Unser Ziel ist die Berechnung der vom Verschiebeoperator S_α induzierten Abbildung $\tilde{S}_\alpha : I_\alpha \rightarrow I_\alpha$ für α nahe α_n und kleine positive $y \in I_\alpha$ (d.h. die zugeordnete Anfangsfunktion ψ ist "in der Nähe" von x_α).

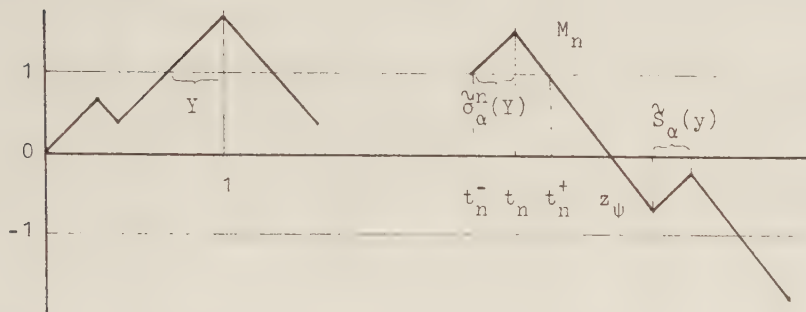
Hierzu ist die Kenntnis des auf die erste positive Nullstelle z_ψ folgenden Segmentes $x_{z_\psi}^\psi$ erforderlich. Entscheidendes

Hilfsmittel zur Berechnung dieses Segments sind wieder die "Zacken", das heißt die Segmente aus M_α (definiert wie im Beweis zu Satz 8.3) sowie die vom Verschiebeoperator $\sigma_\alpha : M_\alpha \rightarrow M_\alpha$ induzierte Abbildung $\tilde{\sigma}_\alpha$.

Sei also $\psi \in Q_\alpha$ eine Anfangsfunktion, deren Koordinate y positiv und nahe bei 0 gewählt ist. Zunächst existiert genau ein $\xi_0 \in (0,1)$, so daß $\psi(\xi_0) = 1$. Sei Y die Koordinate des

$y > 0$ klein!) gegeben durch

$$\mathfrak{S}_\alpha(y) = t_n^+ - t_n^- = 2\mathfrak{S}_\alpha^n(Y) = 2\mathfrak{S}_\alpha^n\left(\frac{\alpha-1}{\alpha} - 2y\right)$$



Man rechnet nun aus, daß

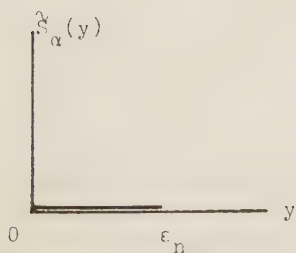
$$\begin{aligned} M_n \leq 1 & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \leq \alpha_n \\ \alpha > \alpha_n \end{cases} \text{ und } y \geq \frac{\alpha - \alpha_n}{2\alpha\alpha_n} \\ M_n > 1 & \Leftrightarrow \alpha > \alpha_n \text{ und } 0 \leq y \leq \frac{\alpha - \alpha_n}{2\alpha\alpha_n} \end{aligned}$$

Die induzierte Abbildung $\mathfrak{S}_\alpha$ ist damit gegeben durch:

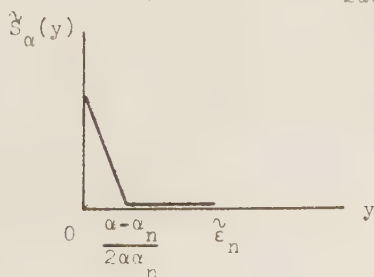
$$\alpha_n^- < \alpha \leq \alpha_n$$

$$\alpha_n \leq \alpha < \alpha_n^+$$

$$\mathfrak{S}_\alpha(y) = 0 \quad ; \quad 0 \leq y \leq \epsilon_n$$



$$\mathfrak{S}_\alpha(y) = \begin{cases} 2\mathfrak{S}_\alpha^n\left(\frac{\alpha-1}{\alpha} - 2y\right) & ; \quad 0 \leq y \leq \frac{\alpha - \alpha_n}{2\alpha\alpha_n} \\ 0 & ; \quad \frac{\alpha - \alpha_n}{2\alpha\alpha_n} \leq y \leq \epsilon_n \end{cases}$$



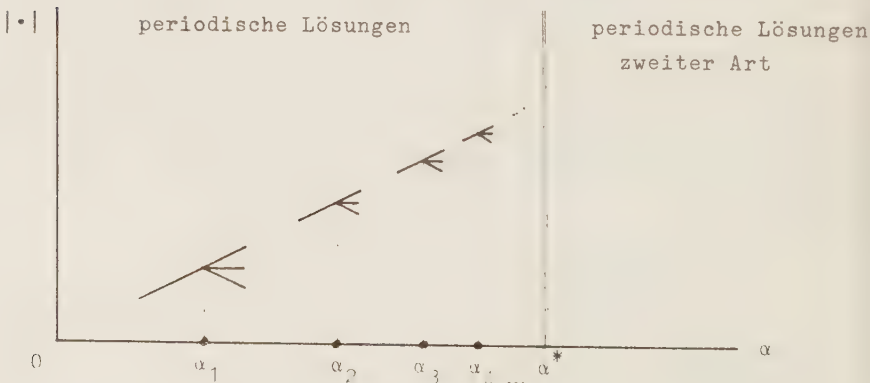
Dabei seien ϵ_n und $\tilde{\epsilon}_n$ geeignete kleine positive Zahlen.

Für $\alpha > \alpha_n$ ist $y = 0$ kein Fixpunkt der Abbildung $\tilde{S}_\alpha$. Bezeichnen wir den Fixpunkt der Abbildung $\tilde{S}_\alpha$ für $\alpha > \alpha_n$ mit y_α^* , so ist die Ableitung von $\tilde{S}_\alpha$ in y_α^* kleiner als -1 .

Bezüglich der Abbildung $\tilde{S}_\alpha^2$ ist der Fixpunktindex dieses Fixpunktes also -1 für $\alpha > \alpha_n$. Ebenso entnimmt man der eindimensionalen Abbildung, daß der abzweigende $\tilde{S}_\alpha^2$ -Fixpunkt gerade $y = 0$ ist (das heißt die Anfangsfunktion χ_α ist für $\alpha > \alpha_n$ $\tilde{S}_\alpha^2$ -Fixpunkt, aber nicht $\tilde{S}_\alpha$ -Fixpunkt) und daß für $\alpha \leq \alpha_n$ die Anfangsfunktion χ_α Fixpunkt des Verschiebeoperators $\tilde{S}_\alpha$ ist ($y = 0$ ist Fixpunkt von $\tilde{S}_\alpha$).

ged.

Wir erhalten damit als partielles Verzweigungsdiagramm:



8.5 BEMERKUNGEN

- (1) Der Parameterwert $\alpha = \alpha^* = \frac{3}{2}$ ist keine Grenze zwischen "periodischen Lösungen" und "periodischen Lösungen zweiter Art". Es gibt periodische Lösungen, die sich in den Parameterbereich $\alpha > \frac{3}{2}$ fortsetzen lassen, z.B. die

periodischen Lösungen vom R-Typ, die für alle $\alpha > 0$ existieren (Lemma 8.1).

Problem: Gibt es periodische Lösungen zweiter Art für $\alpha < \alpha^* = \frac{3}{2}$?

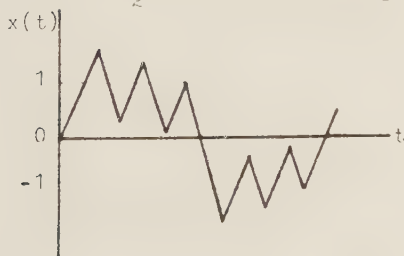
(2) Führt man einen Verschiebeoperator Σ_α für periodische Lösungen zweiter Art ein

$$\Sigma_\alpha : \phi \rightarrow \begin{cases} x_z^\phi - 2 & , \text{ falls } z > 1 \text{ existiert,} \\ & \text{so daß } x^\phi(z) = 2 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

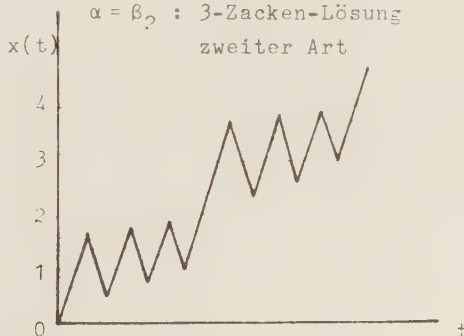
so läßt sich für periodische Lösungen zweiter Art ein ähnliches Verzweigungsphänomen (Abzweigen von Σ_α^2 -Fixpunkten von Σ_α -Fixpunkten) in Parameterwerten $\beta_n > \beta_n$ nachweisen (wobei die β_n wieder explizit berechnet werden können).

(3) Die Anfangsfunktionen χ_α führen in Abhängigkeit vom Parameter α zu Lösungen mit unterschiedlichen strukturellen Eigenschaften. Bezüglich dieser speziellen Anfangsfunktionen kann man den Übergang von periodischen Lösungen zu periodischen Lösungen zweiter Art als sukzessives "Zacken-Aufbauen" ($1 < \alpha < \frac{3}{2}$) bzw. "Zacken-Abbauen" ($\frac{3}{2} < \alpha < 2$) verstehen.

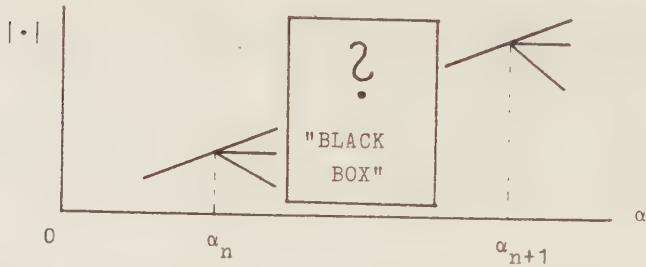
$\alpha = \alpha_2$: 3-Zacken-Lösung



$\alpha = \beta_2$: 3-Zacken-Lösung zweiter Art



Problem: Welche Eigenschaften haben die Lösungen x^α , falls α aus dem Parameterbereich ist, der durch die vorangegangenen Überlegungen nicht erfaßt wurde ("black box")? Gibt es Parameter α , so daß x_α zu einer aperiodischen Lösung führt?



(4) Die Parameterwerte α_n erfüllen die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} = c$$

wobei $c = 4$ und damit verschieden ist von der FEIGENBAUM-Zahl, die bei Kaskadenverzweigungen auftritt (vgl. / 9 /)

#

Die vorhergehenden Beweise zeigen, daß es im allgemeinen schwierig ist, das Bild $S_\alpha \psi$ einer Anfangsfunktion ψ zu berechnen. Der Verschiebeoperator S_α ist der Dynamik der Gleichung wenig angepaßt. Trotzdem ist bei geeigneter Parameterwahl für spezielle Anfangsfunktionen ψ eine Berechnung unter Umständen möglich (wie Satz 8.4 zeigt) und kann zu interessanten Ergebnissen führen. Als weiteres Beispiel dazu analysieren wir S_α für $\alpha \in (1, 1+\varepsilon)$ auf Anfangsfunktionen $\psi \in W_\alpha$, wobei

$$W_\alpha := \{ \psi \in C[0,1] \mid \psi(t) = \begin{array}{ll} \alpha t & ; t \in [0, x] \\ -\alpha t + 2\alpha x & ; t \in [x, x+y] \\ \alpha t - 2\alpha y & ; t \in [x+y, 1] \end{array} ; x, y \geq 0 ; x+y \leq 1 \}$$

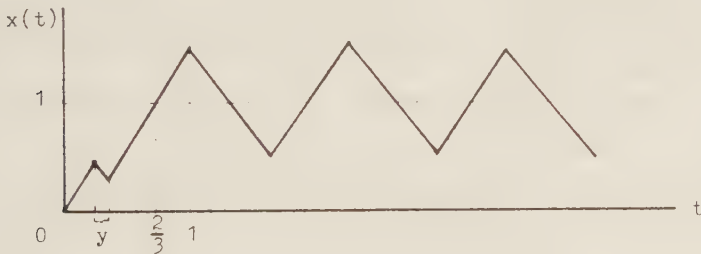
Die Menge W_α ist eine Obermenge der zuvor definierten Menge Q_α . Während Funktionen aus Q_α positiv sind ($y \leq \frac{\alpha-1}{2\alpha}!$), liegen in W_α auch Funktionen, die negative Werte annehmen können ($x \leq y$).

Vermöge x, y und $z = 1-x-y$ können Funktionen aus W_α wieder mit Punkten (x, y, z) im Standard-2-Simplex Δ^2 identifiziert werden. Man beachte, daß die periodischen Lösungen vom R-Typ nicht durch Punkte im Simplex repräsentiert werden.

Die vom Verschiebeoperator S_α induzierte Abbildung $\mathcal{S}_\alpha$ ist im allgemeinen keine Selbstabbildung des Simplex Δ^2 . Zum Beispiel führt die Funktion $\bar{\Psi}_\alpha$ mit den Koordinaten

$$(x, y, z) = \left(\frac{4\alpha-3}{6\alpha}, \frac{2\alpha-3}{6\alpha}, \frac{1}{\alpha} \right)$$

($\frac{3}{2} \leq \alpha \leq \frac{9}{4}$) zu einer schnell schwingenden periodischen Lösung der Periode $\frac{4}{3}$ um die stationäre Lösung $x \equiv 1$:



Eine vollständige Berechnung der Abbildung $\mathcal{S}_\alpha$ (für alle $\alpha > 0$ und alle $(x, y, z) \in \Delta^2$) wie in Kapitel I erscheint also nicht möglich.

Immerhin gelingt für $\alpha \in (1, 2)$ eine Berechnung von $\mathcal{S}_\alpha$ auf Teilen des Simplex Δ^2 :

8.6 SATZ Sei $\alpha \in (1, \frac{4}{3})$. Dann hat die Abbildung $\mathcal{S}_\alpha$ im Simplex Δ^2 wenigstens fünf Fixpunkte:

$$(x, y, z)_1 = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}, 0, \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$(x, y, z)_2 = \left(\frac{4}{7} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{3}{7} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$(x, y, z)_3 = \left(\frac{1}{7} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{6}{7} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$(x, y, z)_4 = \left(\frac{1}{3} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{2}{5} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{4\alpha+11}{15\alpha} \right)$$

$$(x, y, z)_5 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)$$

Beweis: Durch Nachrechnen.

qed.

8.7 KOROLLAR (Multiple Verzweigung in $\alpha = 1$)

Im Parameterwert $\alpha = 1$ zweigen wenigstens vier verschiedene periodische Lösungen von den periodischen Lösungen vom R-Typ ab.

Beweis: Offensichtlich streben die Fixpunkte $(x, y, z)_i$, $1 \leq i \leq 4$ für $\alpha \rightarrow 1$ gegen den Punkt $(0, 0, 1) \in \Delta^2$, welcher der periodischen Lösung vom R-Typ entspricht (für $\alpha = 1$).

qed.

8.8 BEMERKUNGEN

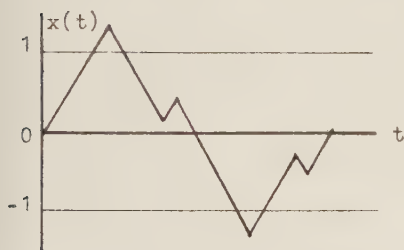
(1) Dem Fixpunkt $(x, y, z)_5 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)$ entspricht eine schnell schwingende periodische Lösung der Periode $\frac{4}{5}$ um die Ruhelage $x = 0$. Diese Lösung zweigt nicht in $\alpha = 1$ von der periodischen Lösung vom R-Typ ab.

(2) Die in $\alpha = 1$ abzweigenden Lösungen können mit Ausnahme der zu $(x, y, z)_1$ gehörenden periodischen Lösung bis $\alpha = 2$ fortgesetzt werden. $(x, y, z)_1 = (\frac{\alpha-1}{\alpha}, 0, \frac{1}{\alpha})$ ist für $\alpha > \frac{4}{3}$ ($= \alpha_1$ in Satz 8.3) nicht mehr $\mathfrak{S}_\alpha$ -Fixpunkt, sondern (zunächst) Fixpunkt von $\mathfrak{S}_\alpha^2$ (vgl. Satz 8.3).

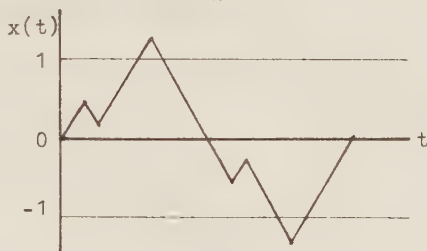
#

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir noch die den $\mathfrak{S}_\alpha$ -Fixpunkten zugeordneten periodischen Lösungen aufzeichnen:

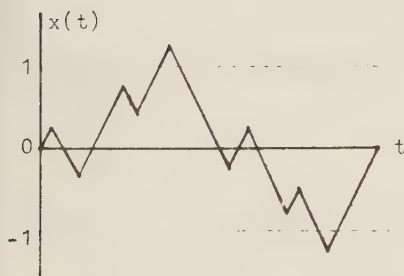
zu $(x, y, z)_1$:



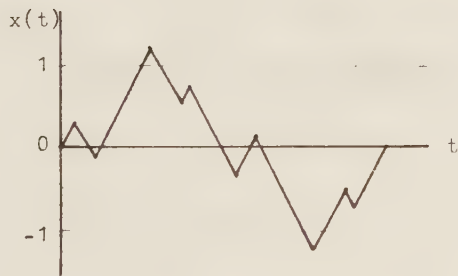
zu $(x, y, z)_2$:



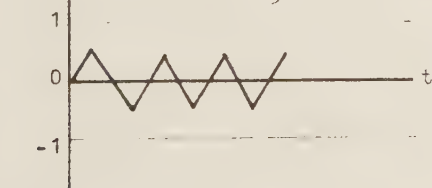
zu $(x, y, z)_3$:



zu $(x, y, z)_4$:

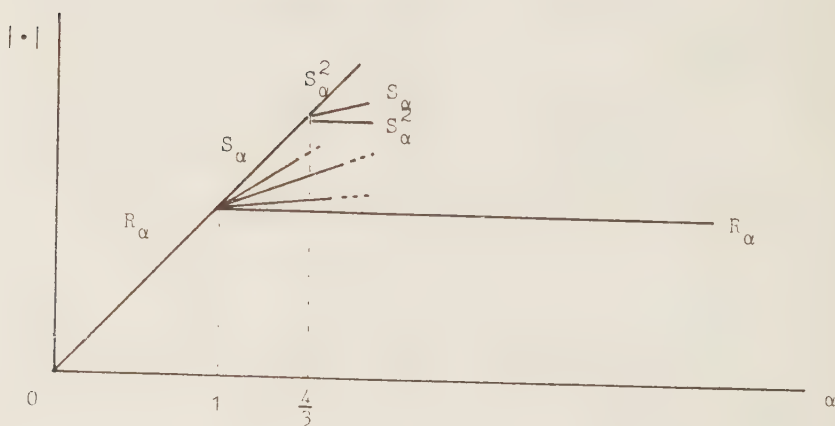


zu $(x, y, z)_5$:



Die periodische Lösung zu $(x, y, z)_4$ nimmt unter den Lösungen $(x, y, z)_i$ ($1 \leq i \leq 4$) in zweierlei Hinsicht eine Sonderstellung ein: zum einen erfüllen die Koordinaten x, y nicht die Beziehung $x + y = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$, zum andern wechselt die Ableitung des Segments x_ξ^ψ (wo $\xi := \min\{t > 0 \mid x^\psi_4(t) = 1\}$ und ψ_4 die $(x, y, z)_4$ zugeordnete Funktion aus W_α ist) öfter als einmal das Vorzeichen. Das heißt: dieses Segment liegt nicht in der Menge M_α der "Zacken".

Verzweigungsdiagramm



§ 9 Komplexe Dynamik

In § 8 haben wir an mehreren Stellen gesehen, daß der Verschiebeoperator S_α nicht das geeignete Hilfsmittel ist, um das Periodizitätsproblem für die Gleichung (7.2) mit der Modell-Nichtlinearität (7.3) in seiner ganzen Komplexität zu beschreiben. Unter anderem liegt das daran, daß bei der Definition des Verschiebeoperators S_α die stationäre Lösung $x \equiv 0$ ausgezeichnet ist (Definition von S_α über Nullstellen der Lösung). Diese Auszeichnung einer festen Ruhelage erscheint aber bei einer Gleichung mit mehreren stationären Lösungen wie Gleichung (7.2) nicht mehr gerechtfertigt.

Die zentrale Idee bei der Behandlung des Periodizitätsproblems besteht darin, Segmente der Lösung x^ψ auf Intervallen der Länge 1 zu vergleichen. Wenn man ein Segment x_t^ψ findet, das mit der Anfangsfunktion ψ identisch ist (bei ungeradem f reicht auch: $x_t^\psi \equiv -\psi$), so muß die Lösung x^ψ aufgrund der Autonomie der Differentialgleichung periodisch sein. Bei einer solchen Sehweise ist kein Verschiebeoperator ausgezeichnet.

Wir werden in diesem Paragraphen in gewisser Weise "operatorfrei" argumentieren: an ausgewählten Segmenten der Lösung x^ψ ("Zacken") werden wir vergleichende Messungen vornehmen. Stimmen für zwei Segmente $x_{t_1}^\psi, x_{t_2}^\psi$ ($t_2 > t_1 + 1$) die Meßergebnisse überein, so ist entweder $x_{t_1}^\psi \equiv x_{t_2}^\psi$ oder $x_{t_1}^\psi \equiv -x_{t_2}^\psi$.

Das heißt: modulo Vorzeichen sind dann die Segmente identisch. Wegen Ungeradheit von f und Autonomie der Differentialgleichung (7.2) ist dann aber x^ψ zwangsläufig periodische Lösung.

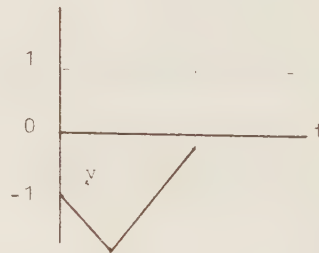
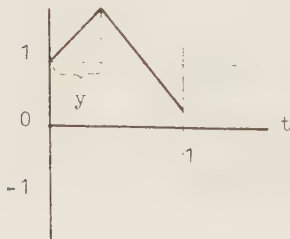
Die Auswahl der Segmente, die für die Messungen herangezogen werden, wird dabei so getroffen, daß einerseits hinreichend viel an Information über die Gleichung (7.2) erfaßt wird, daß aber andererseits die Rechnungen nicht zu kompliziert werden.

Letzten Endes wird die Dynamik der Gleichung (7.2) auf diesen speziellen Anfangsfunktionen wieder durch eine eindimensionale Abbildung h_α beschrieben, die sich chaotisch im Sinne von LI und YORKE verhält.

Beginnen wir mit der Definition der Menge M_α^+ der "positiven Zacken" :

$$M_\alpha^+ := \{ \psi \in C[0,1] \mid \psi(t) = \begin{cases} \alpha t + 1 & ; t \in [0, y] \\ -\alpha t + 2\alpha y + 1 & ; t \in [y, 1] \end{cases} ; 0 \leq y \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \}$$

Mit $M_\alpha^- := \{ \psi \in C[0,1] \mid -\psi \in M_\alpha^+ \}$ bezeichnen wir die Menge der "negativen Zacken" .



M_α^+ ist vermöge y offensichtlich homöomorph zum Intervall $[0, \frac{\alpha-1}{\alpha}]$.

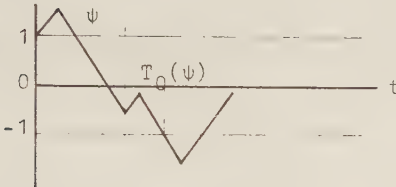
9.1 LEMMA Es sei $\alpha \leq 2$. Dann existiert zu jedem $\psi \in M_\alpha^+$ (bzw. $\psi \in M_\alpha^-$) :

$$T_0(\psi) : \min \{ T > 1 \mid x_T^\psi \in M_\alpha^+ \cup M_\alpha^- \}$$

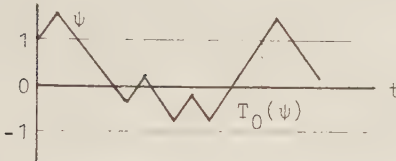
und es ist $T_0(-\psi) = T_0(\psi)$.

Beweis: Sei $y \in [0, \frac{\alpha-1}{\alpha}]$ die Koordinate der Funktion $\psi \in M_{\alpha}^{+}$ (bzw. der Funktion $\psi \in M_{\alpha}^{-}$). Wir unterscheiden fünf Fälle:

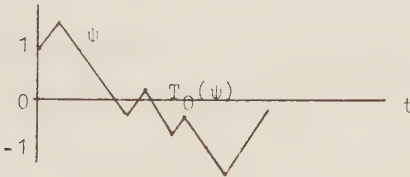
$$(1) \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{4} \frac{\alpha-1}{\alpha} \quad : \quad T_0(\psi) = 6y + \frac{2}{\alpha}$$



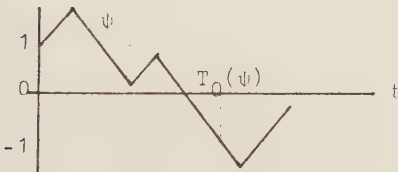
$$(2) \quad \frac{1}{4} \frac{\alpha-1}{\alpha} < y < \frac{3}{8} \frac{\alpha-1}{\alpha} \quad : \quad T_0(\psi) = 14y - 2 + \frac{6}{\alpha}$$



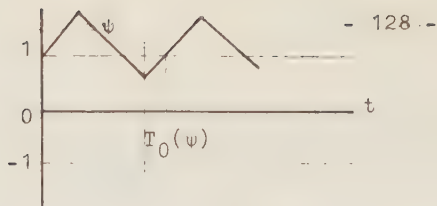
$$(3) \quad \frac{3}{8} \frac{\alpha-1}{\alpha} \leq y \leq \frac{1}{2} \frac{\alpha-1}{\alpha} \quad : \quad T_0(\psi) = 4 - 2y - \frac{2}{\alpha}$$



$$(4) \quad \frac{1}{2} \frac{\alpha-1}{\alpha} < y < \frac{1}{4} \quad : \quad T_0(\psi) = 6y + \frac{2}{\alpha}$$



$$(5) \quad \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \quad : \quad T_0(\psi) = 2 - 2y$$



Die zu den Bildern gehörenden (elementaren) Rechnungen ersparen wir uns.

qed.

9.2 BEMERKUNG : Für $\alpha > 2$ ist das Lemma im allgemeinen nicht richtig. Zum Beispiel führt die Anfangsfunktion ψ , die definiert ist durch $\psi(0) = 1$, $\dot{\psi} \equiv \frac{5}{2}$ auf $[0, \frac{1}{5})$, $\dot{\psi} \equiv -\frac{5}{2}$ auf $[\frac{1}{5}, 1]$ zu einer schnell schwingenden periodischen Lösung der Periode $\frac{4}{5}$ um die Gleichgewichtslage $x \equiv 0$. Das heißt: $\psi \in M_{\alpha}^{+}$, aber $x_T^{\psi} \notin M_{\alpha}^{+} \cup M_{\alpha}^{-}$ für alle $T > 1$.

#

Jetzt definieren wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} H_{\alpha} : M_{\alpha}^{+} \cup M_{\alpha}^{-} &\rightarrow M_{\alpha}^{+} \cup M_{\alpha}^{-} \\ \psi &\rightarrow x_{T_0}^{\psi}(\psi) \end{aligned}$$

H_{α} ist kein Verschiebeoperator im klassischen Sinn. Insbesondere ist H_{α} nicht stetig (da T_0 nicht stetig ist).

9.3 LEMMA Sei $\psi \in M_{\alpha}^{+} \cup M_{\alpha}^{-}$ und $p \in \mathbb{N}$.

Falls $H_{\alpha}^p(\psi) = \psi$ oder $H_{\alpha}^p(\psi) = -\psi$, dann ist x^{ψ} periodische Lösung der Gleichung (7.2).

Beweis: $H_\alpha^P(\psi) = \pm\psi$ bedeutet: Es gibt eine Folge $T_0(\psi)$, $T_1(\psi)$, ..., $T_p(\psi)$ derart, daß $x_{T_1}^\psi(\psi) \in M_\alpha^+ \cup M_\alpha^-$ und $x_{T_p}^\psi(\psi) \equiv \pm\psi$. Da Gleichung (7.2) autonom und die Nichtlinearität (7.3) ungerade ist, ist x^ψ periodische Lösung.

qed.

Aufgrund des vorherigen Lemmas repräsentieren sowohl Funktionen aus M_α^+ als auch Funktionen aus M_α^- , sofern sie eine Anfangsfunktion (modulo Vorzeichen) reproduzieren, eine periodische Lösung. Wir identifizieren deshalb Funktionen aus $M_\alpha^+ \cup M_\alpha^-$ mit gleichen Koordinaten:

Sei $\phi \in M_\alpha^+ \cup M_\alpha^-$ mit Koordinate y , $\psi \in M_\alpha^+ \cup M_\alpha^-$ mit Koordinate y' . Definiere eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge $M_\alpha^+ \cup M_\alpha^-$ durch:

$$\phi \sim \psi \iff y = y'$$

$\mathcal{M}_\alpha := (M_\alpha^+ \cup M_\alpha^-) / \sim$ bezeichne den Quotientenraum, $H_\alpha: \mathcal{M}_\alpha \rightarrow \mathcal{M}_\alpha$ mit $H_\alpha([\phi]) := [H_\alpha(\phi)]$ die induzierte Abbildung.

Mit y als Koordinate ist $\mathcal{M}_\alpha$ homöomorph zum Intervall $I_\alpha := [0, \frac{\alpha-1}{\alpha}]$. Anstelle der Abbildung H_α studieren wir jetzt die induzierte Abbildung $h_\alpha: I_\alpha \rightarrow I_\alpha$.

9.4 BEMERKUNG Die Abbildung h_α hat eine einfache geometrische Bedeutung: Seien $x_{t_1}, x_{t_2} \in M_\alpha^+ \cup M_\alpha^-$ ($t_2 > t_1 + 1$) mit Koordinaten y_1, y_2 , so bildet h_α die Koordinate

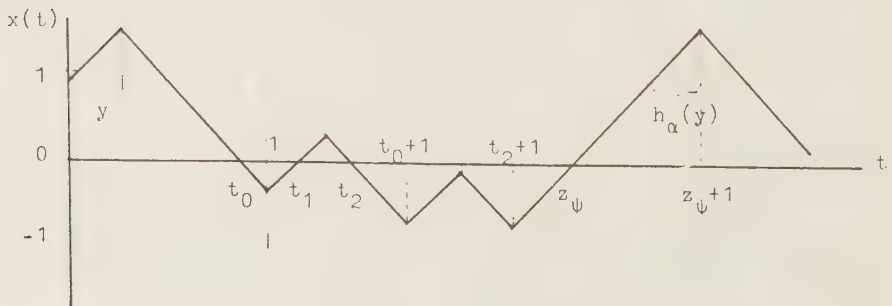
y_1 des Segments x_{t_1} auf die Koordinate y_2 des Segments x_{t_2} ab, wobei unberücksichtigt bleibt, ob x_{t_i} "positiver" oder "negativer" Zacken (das heißt aus M_α^+ oder aus M_α^-) ist.

##

9.5 LEMMA Es sei $1 < \alpha < 2$. Die Abbildung $h_\alpha : I_\alpha \rightarrow I_\alpha$ ist gegeben durch

$$h_\alpha(y) = \begin{cases} -4y + \frac{\alpha-1}{\alpha} & ; y \in [0, \frac{1}{4} \frac{\alpha-1}{\alpha}] \\ \frac{\alpha-1}{\alpha} & ; y \in (\frac{1}{4} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{3}{8} \frac{\alpha-1}{\alpha}) \\ 8y - 3\frac{\alpha-1}{\alpha} & ; y \in [\frac{3}{8} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{1}{2} \frac{\alpha-1}{\alpha}] \\ \frac{\alpha-1}{\alpha} & ; y \in (\frac{1}{2} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{1}{4}) \\ 4y - 1 & ; y \in [\frac{1}{4}, \frac{\alpha-1}{\alpha}] \end{cases}$$

Beweis: Die Berechnung der Abbildung h_α ist elementar. Zur Illustration führen wir die Rechnung auf dem Intervall $(\frac{1}{4} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{3}{8} \frac{\alpha-1}{\alpha})$ vor:



Zunächst existiert wegen $y < \frac{\alpha-1}{2\alpha}$ genau ein $t_0 < 1$ mit $x^\psi(t_0) = 0$. Man berechnet $t_0 = 2y + \frac{1}{\alpha}$.

$$x^\psi(1) = 1 - \alpha(1-2y) = 1 - \alpha + 2\alpha y \quad \begin{cases} < 0, & \text{da } y < \frac{\alpha-1}{2\alpha} \\ > -1, & \text{da } y > \frac{\alpha-2}{2\alpha} \end{cases} \quad (\alpha \leq 2!)$$

$$x^\psi(1+2y) = x^\psi(1) + 2\alpha y = 1 - \alpha + 4\alpha y \quad \begin{cases} > 0, & \text{da } y > \frac{\alpha-1}{4\alpha} \\ < 1, & \text{da } y < \frac{1}{4} \end{cases} \quad (*)$$

Daher existiert genau ein $t_1 \in (1, 1+2y)$, so daß $x(t_1) = 0$. Aus Symmetriegründen ist $t_1 = 1 + (1-t_0)$.

$$x^\psi(t_0+1) = x^\psi(1+2y+\frac{1}{\alpha}) = x^\psi(1+2y) - 1 \quad \begin{cases} > -1 \\ < 0 \end{cases} \quad \text{wegen } (*)$$

Deshalb existiert genau ein $t_2 \in (1+2y, 1+2y+\frac{1}{\alpha})$, so daß $x^\psi(t_2) = 0$. Aus Symmetriegründen ist $t_2 = t_1 + 2(1+2y-t_1)$.

$$\begin{aligned} x^\psi(t_1+1) &= x^\psi(1+2y+\frac{1}{\alpha}+t_1-t_0) = x^\psi(1+2y+\frac{1}{\alpha}) + \alpha(t_1-t_0) = \\ &= \alpha - 2 < 0, \text{ da } \alpha < 2. \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$x^\psi(t_2+1) = x^\psi(t_1+1) - \alpha(t_2-t_1) = 3\alpha - 4 - 8y > -1, \text{ da } y < \frac{3}{8} \frac{\alpha-1}{\alpha}.$$

Da die Lösung x^ψ auf dem Intervall (t_2, t_2+1) nur Werte zwischen -1 und 0 annimmt, hat die Lösung konstanten Anstieg $+\alpha$ bis zum Erreichen des Maximums in $z_\psi + 1$ (wo z_ψ die auf t_2+1 folgende Nullstelle ist). Die Koordinate $h_\alpha(y)$ des Segments $x_{T_0}^\psi(\psi) \in M_\alpha^+$ ist also $\frac{\alpha-1}{\alpha}$.

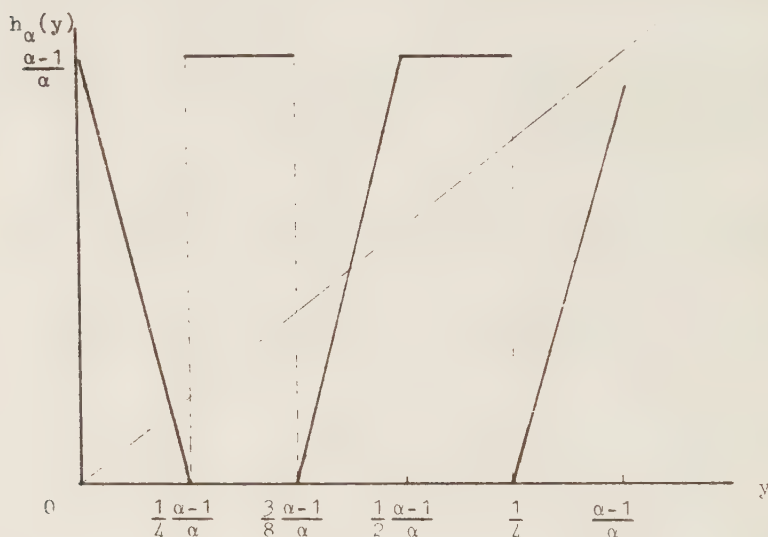
Auf ähnliche Weise berechnet man die Abbildung h_α auf den anderen Intervallen.

qed.

- 9.6 BEMERKUNG Die explizite Berechnung der Lösung zeigt, daß die Voraussetzung $1 < \alpha < 2$ an den Parameter α wesentlich ist. Dadurch wird ausgeschlossen, daß die Lösung zu oft um 0 oszilliert (vgl. Beispiel in Bemerkung 9.2).

#

Wir können jetzt den Graph der Abbildung h_α aufzeichnen:



Von der Konstruktion der Abbildung h_α her ist klar, daß periodische (bzw. aperiodische) Punkte von h_α periodischen (bzw. aperiodischen) Lösungen der Gleichung (7.2) entsprechen. Ziel ist es daher, zu zeigen, daß h_α sich chaotisch im Sinne von LI und YORKE verhält. Da die Abbildung h_α nicht stetig ist, ist der Satz von LI und YORKE (Satz 2.1) auf h_α nicht anwendbar.

Das folgende Lemma zeigt, daß chaotisches Verhalten im Sinne von LI und YORKE auch gewährleistet ist, wenn eine gewisse "Überdeckungseigenschaft" (die im Satz von LI und YORKE aus der Existenz eines Punktes der Periode 3 folgt) erfüllt ist.

9.7 LEMMA Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ disjunkte, abgeschlossene Intervalle, und sei $h : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig . Falls die Abbildung h die Eigenschaft

$$(P) \quad \begin{aligned} h(A) &\supset A \cup B \\ h(B) &\supset A \end{aligned}$$

erfüllt, dann verhält sich h chaotisch im Sinne von LI und YORKE. Insbesondere existieren unendlich viele periodische und aperiodische Punkte der Abbildung h in $A \cup B$.

Beweis: SIEGBERG /37/

qed.

Dieses Lemma läßt sich auf die Abbildung h_α aber mehrmals anwenden. Definieren wir nämlich die Intervalle A, B, C, D folgendermaßen:

$$A := \left[0, \frac{1}{4} \frac{\alpha-1}{\alpha}\right] \quad B := \left[\frac{3}{8} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{3}{7} \frac{\alpha-1}{\alpha}\right]$$

$$C := \left[\frac{3}{7} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{1}{2} \frac{\alpha-1}{\alpha}\right] \quad D := \left[\frac{1}{4}, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right]$$

$\left(\frac{3}{7} \frac{\alpha-1}{\alpha}\right)$ ist der Fixpunkt der Abbildung h_α im Intervall $\left[\frac{3}{8} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{1}{2} \frac{\alpha-1}{\alpha}\right]$!), so können wir Lemma 9.7 dreimal anwenden:

(1) Chaos in $A \cup B$:

Für alle $\alpha \in (1, 2)$ ist

$$h_{\alpha}(A) = [0, \frac{\alpha-1}{\alpha}] \supset A \cup B$$

$$h_{\alpha}(B) = [0, \frac{\alpha-1}{\alpha}] \supset A \cup B$$

Das heißt: (P) ist erfüllt und h_{α} ist chaotisch mit periodischen und aperiodischen Punkten in $A \cup B$.

(2) Chaos in $A \cup D$:

Es ist

$$h_{\alpha}(A) = [0, \frac{\alpha-1}{\alpha}] \supset A \cup D$$

Und es gilt:

$$h_{\alpha}(D) = [0, \frac{3\alpha-4}{\alpha}] \supset A$$

genau dann, wenn $\frac{3\alpha-4}{\alpha} > \frac{1}{4} \frac{\alpha-1}{\alpha}$, das heißt wenn $\alpha > \frac{15}{11}$.

(3) Chaos in $C \cup D$:

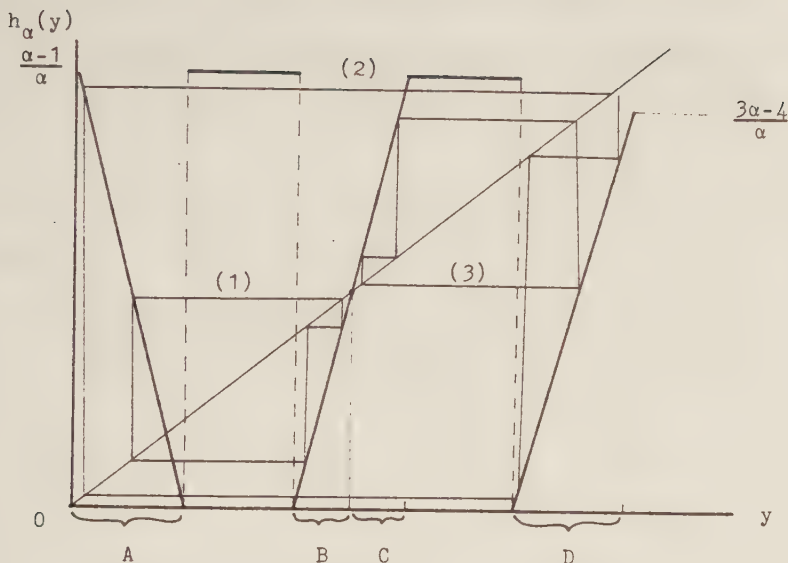
Es ist

$$h_{\alpha}(C) = [\frac{3}{7} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}] \supset C \cup D$$

Und es gilt:

$$h_{\alpha}(D) = [0, \frac{3\alpha-4}{\alpha}] \supset C$$

genau dann, wenn $\frac{3\alpha-4}{\alpha} > \frac{1}{2} \frac{\alpha-1}{\alpha}$, das heißt wenn $\alpha > \frac{7}{5}$.



Interpretieren wir periodische bzw. aperiodische Punkte der Abbildung h_α als Segmente in der Funktionenmenge $M_\alpha^+ \cup M_\alpha^-$, so wird die Aussage über die jeweilige Lage der Punkte in A, B, C, D zu einer Aussage über die Amplitude (= Norm) der zugehörigen periodischen bzw. aperiodischen Lösung der Gleichung (7.2).

Berücksichtigen wir noch, daß Segmente aus $M_\alpha^+ \cup M_\alpha^-$ mit Koordinaten $y \in B \cup C$ zu (bezüglich 0) schnell schwingenden Segmenten führen (vgl. Beweis zu Lemma 9.1 bzw. Lemma 9.5), so erhalten wir insgesamt den folgenden Satz:

9.8 SATZ ("Multiples Chaos für periodische Lösungen")

Es sei $\alpha \in (1, 2)$. Dann verhält sich Gleichung (7.2) mit Nichtlinearität (7.3) chaotisch im Sinne von LI und YORKE.

Genauer können drei verschiedene Arten periodischer bzw. aperiodischer Lösungen aufgrund ihrer Amplituden und ihres Schwingungsverhaltens unterschieden werden:

(1) Für jedes $\alpha \in (1, 2)$ existieren unendlich viele periodische und aperiodische Lösungen x_α , so daß

$$(i) \quad |||x_\alpha||| = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |x_\alpha(t)| < \frac{1}{7} (3\alpha + 4)$$

(ii) x_α ist schnell schwingende Lösung bezüglich der stationären Lösung $x \equiv 0$.

(2) Für jedes $\alpha \in (\frac{15}{11}, 2)$ existieren unendlich viele periodische und aperiodische Lösungen x_α die bezüglich $x \equiv 0$ langsam schwingende, bezüglich $x \equiv +1$ und $x \equiv -1$ schnell schwingende Lösungen sind.

(3) Für jedes $\alpha \in (\frac{7}{2}, 2)$ existieren unendlich viele periodische und aperiodische Lösungen x_α , so daß

$$(i) \quad |||x_\alpha||| = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |x_\alpha(t)| > \frac{1}{7} (3\alpha + 4)$$

(ii) x_α ist schnell schwingende Lösung bezüglich der stationären Lösung $x \equiv 0$.

Beweis: Klar nach dem Vorhergehenden .

qed.



9.9 BEMERKUNGEN

(1) Den Fixpunkten $y_1 = \frac{1}{5} \frac{\alpha-1}{\alpha}$, $y_2 = \frac{3}{7} \frac{\alpha-1}{\alpha}$, $y_3 = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ der Abbildung h_α entsprechen die Fixpunkte $(x, y, z)_2 = (\frac{4}{7} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{3}{7} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$, $(x, y, z)_3 = (\frac{1}{7} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{6}{7} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$, $(x, y, z)_1 = (\frac{\alpha-1}{\alpha}, 0, \frac{1}{\alpha})$ der Abbildung $\mathfrak{S}_\alpha$ auf dem Simplex Δ^2 (vgl. Satz 8.6). Der Fixpunkt $(x, y, z)_4 = (\frac{1}{3} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{2}{5} \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{4\alpha+11}{15})$ der Abbildung $\mathfrak{S}_\alpha$ wird durch

die Abbildung h_α nicht erfaßt, da die zugehörige periodische Lösung keine Segmente in $M_\alpha^+ \cup M_\alpha^-$ hat.

(2) Wir vermuten, daß "fast alle" Anfangswerte $y \in [0, \frac{\alpha-1}{\alpha}]$ nach endlich vielen Iterationen auf den konstanten Wert $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ abgebildet werden (vgl. Beispiel 2.3). Die Lösungen x^y zu "fast allen" Anfangsfunktionen $\psi \in M_\alpha^+ \cup M_\alpha^-$ verhalten sich dann so wie die Lösung x^{χ_α} zur speziellen Anfangsfunktion χ_α , definiert durch $\chi_\alpha(t) = \alpha t$ ($t \in [0, 1]$). Es sei aber noch einmal daran erinnert, daß das Verhalten der Lösungen x^{χ_α} nicht für alle $\alpha \in (1, 2)$ bekannt ist (vgl. Bemerkung 8.5, (3)).

(3) Chaotisches Verhalten auf einer (eindimensionalen) Teilmenge kann für die Gleichung insgesamt "irrelevant" sein. Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:
Sei $g(x) = \alpha x(1+x^8)^{-1}$ (α so groß, daß ein Punkt der Periode 3 existiert), $f(y) = 3 \tanh(y)$. Sei $y = y^*$ der (eindeutige) positive nichttriviale Fixpunkt der Abbildung f . Die Abbildung

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\rightarrow \left(\frac{|y^* - f(y)|}{y}, g(x), f(y) \right) \end{aligned}$$

verhält sich dann auf der eindimensionalen Menge $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ chaotisch, während jeder Anfangswert $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ mit $y > 0$ unter Iteration von H gegen den Punkt $(0, y^*)$ konvergiert.

In Kapitel 1 repräsentierte die Menge Λ_α alle (von monoton wachsenden Funktionen erzeugten) Lösungen. Die Auswahl der Menge M_α^+ ist nicht auf eine derartige Weise gerechtfertigt. Wie "repräsentativ" M_α^+ für die Gesamtdynamik der Gleichung (7.2)/(7.3) ist, scheint auch vom Parameter α abzuhängen (vgl. Bemerkung 9.2).

9.10 SATZ (Chaos für periodische Lösungen zweiter Art)

Für $\alpha \in (\frac{8}{5}, 2)$ verhält Gleichung (7.2) mit Nichtlinearität (7.3) sich chaotisch in Bezug auf periodische Lösungen zweiter Art.

Beweisskizze: Seien die Mengen $M_{\alpha, 2k+1}^+$ definiert durch:

$$M_{\alpha, 2k+1}^+ := \{ \phi \in C[0, 1] \mid \phi(t) = \begin{array}{ll} \alpha t + 2k+1 & ; t \in [0, y] \\ -\alpha t + 2\alpha y + 2k+1 & ; t \in [y, 1] \end{array} ; 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \}$$

Es reicht zu zeigen, daß unendlich viele $\phi_0 \in M_{\alpha, 1}^+$ zu einer periodischen bzw. aperiodischen Folge $\phi_k \in M_{\alpha, 2k+1}^+$

führen. Wir zeigen dies wieder über eine zugeordnete Intervallabbildung h_α .

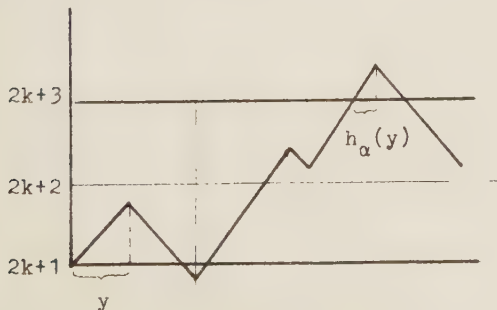
Jede der Mengen $M_{\alpha, 2k+1}^+$ ist homöomorph zum Intervall $[0, \frac{1}{2}]$.

Wir identifizieren wieder Funktionen aus $M_{\alpha, 2k+1}^+$ mit gleicher Koordinate y . Die induzierte Abbildung h_α läßt sich auf Teilintervallen von $[0, \frac{1}{2}]$ einfach berechnen:

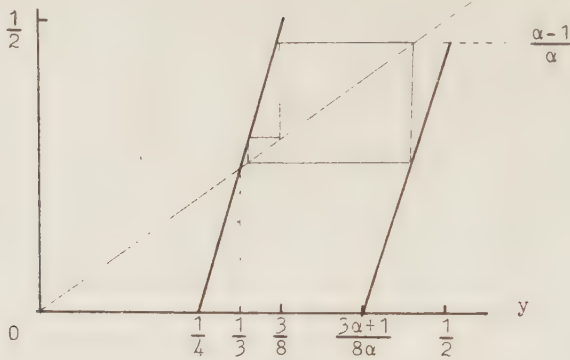
(1) $\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{8}$: In diesem Fall ist $h_\alpha(y) = 4y - 1$



(2) $\frac{3\alpha+1}{8\alpha} \leq y \leq \frac{1}{2}$: In diesem Fall ist $h_\alpha(y) = 8y - \frac{3\alpha+1}{\alpha}$



Der Graph der Abbildung h_α sieht folgendermaßen aus:



Mit $A := [\frac{1}{3}, \frac{2}{8}]$ ($y = \frac{1}{3}$ ist Fixpunkt !) und $B := [\frac{3\alpha+1}{8\alpha}, \frac{1}{2}]$ ist offensichtlich

$$h_\alpha(A) = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \supset A \cup B$$

und es ist

$$h_\alpha(B) = [0, \frac{\alpha-1}{\alpha}] \supset A \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha} > \frac{3}{8} \Leftrightarrow \alpha > \frac{8}{5}$$

Lemma 9.7 liefert also unendlich viele periodische und aperiodische Punkte für die Abbildung h_α in $A \cup B$, die Anfangsfunktionen für unendlich viele periodische und aperiodische Lösungen zweiter Art der Gleichung (7.2)/(7.3) entsprechen.

qed.

9.11 BEMERKUNG Ähnlich wie in Lemma 9.5 läßt sich auch in diesem Fall die Abbildung h_α für $\alpha \in (1,2)$ vollständig ausrechnen:

$$h_{\alpha}(y) = \begin{cases} 4y - 1 & ; \quad \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{8} \\ \frac{\alpha-1}{\alpha} & ; \quad \frac{3}{8} < y < \frac{\alpha+1}{4\alpha} \\ \frac{5\alpha+3}{\alpha} - 16y & ; \quad \frac{\alpha+1}{4\alpha} \leq y \leq \frac{5\alpha+3}{16\alpha} \\ \frac{2-\alpha}{\alpha} & ; \quad \frac{5\alpha+3}{16\alpha} < y < \frac{3\alpha+1}{8\alpha} \\ 8y - \frac{3\alpha+1}{\alpha} & ; \quad \frac{3\alpha+1}{8\alpha} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dies erlaubt zusammen mit Lemma 9.7 den Nachweis "multiplen" chaotischen Verhaltens für periodische Lösungen zweiter Art.

#

§ 10

Schlußbemerkungen

Unsere Überlegungen zu den einfachen nichtlinearen zeitverzögerten Modellgleichungen haben ein kompliziertes Lösungsverhalten aufgedeckt, das von Zielen der linearen Analysis wie Eindeutigkeit oder stetige Abhängigkeit von Anfangsdaten weit entfernt ist. Dies wirft unseres Erachtens einige Fragen auf.

Zunächst erhebt sich die Frage, ob die gefundenen Phänomene, deren Beweis entscheidend von der Tatsache abhing, daß die zugrundeliegenden Nichtlinearitäten stückweise konstant sind, auch für die ursprünglichen Gleichungen nachgewiesen werden können.

Bei einem konkret gegebenen Problem wird man sich fragen müssen, was der "richtige" Lösungsoperator ist. Wie wir sahen, kann die Beschränkung auf den Operator R den Einblick in das tatsächliche Verhalten der Dynamik der Gleichung verstellen. Das gleiche kann unter Umständen (in nicht so offensichtlicher Weise) auch für die Operatoren S , S^2 , etc. gelten. Die unendlich vielen periodischen Lösungen sind unter Umständen alle instabil und charakteristisch für die Gleichung sind aperiodische Lösungen. Dieser Gesichtspunkt erweckt Skepsis gegen Eindeutigkeits- oder Multiplizitätsresultate ohne eine begleitende Stabilitätsanalyse der gefundenen Lösungen.

Erscheint das chaotische Verhalten der Modell-Gleichung in Kapitel II in gewisser Weise als "natürliche" Konsequenz einer Nichtlinearität mit mehreren Nullstellen (Interaktion der zu verschiedenen Equilibria gehörenden periodischen Lösungen), so ist es rückblickend überraschend, daß die Modell-Gleichung aus Kapitel I sich chaotisch verhält. Hier wird das chaotische Verhalten nicht durch zusätzliche stationäre Lösungen, sondern allein durch die "Buckelcigeigenschaft" der Nichtlinearität f verursacht.

Alle variablen Berechnung zweckvoller Lösungsoperatoren stehen in unersetzlicher Hinsicht problematisch. Nicht nur einer Lösungsoperator, aber $\hat{L}$, so bedeutet die Berechnung des globalen Lösungsoperators, wenn es sich um ein globalisiertes Lösungsoperator, so nur aber auch wenn einen globalen Lösungsoperator alle anderen Lösungen beinhalten, werden charakteristischen Lösungen der Gleichung (zum Beispiel aperiodische Lösungen) möglicherweise verdeckt. Kochnet man in Erwartung chaotischen Verhaltens mit "variablen" Lösungsoperator, so steht man bereits bei der eindimensionalen Differenzengleichung $x_{n+1} = rx_n' - x_n'$ auf zahlreichen Schwierigkeiten: unendlich viele Verzweigungspunkte, sowie Unkernpunkte isolierter Lösungszweige bringen schließlich jedes diskrete Verfahren zum Erliegen. Mehr als Teilantworten darf man nicht erwarten.

Bei konkreten Fragestellungen (Bestimmung der periodischen Lösungen von S-Typ der Gleichung (2.13)) hat sich die gute Kenntnis des Modell-Problems (4.2)/(4.3) als nützlich erwiesen (Analogieverfahren mit Modell-Problemen und Überproblemen (vgl. [34])).

Hinsichtlich einer Modellierung realer Systeme in Elektrotechnik, Biologie, Chemie, Ökonomie usw. halten wir zweierlei für Überzeugendes:

Periodische Lösungen oder allgemeiner Oszillationen, wie wir sie in Kapitel II am Modell der Gleichung (7.1) kennengelernt haben, treten auch bei Schwingungsgleichungen mit "Forcing term" auf ([14]). Ein qualitativ ähnliches Lösungsverhalten kann demnach durch mindestens zwei verschiedene Gleichungstypen (zum einen Delay-Gleichung mit mehreren Equilibria, zum anderen Schwingungsgleichung mit Erregung) erzeugt werden. Bei einer Modellierung "chaotischer Oszillationen" stehen also wenigstens zwei verschiedene Ansätze in Konkurrenz: Kontroll-Modelle mit Zeitverzögerung und/oder Schwingungs-Modelle mit Erregung.

Die Frage des Mathematikers nach dem Zusammenhang zwischen Differentialgleichung und approximierender Differenzengleichung stellt sich für den Anwender unter Umständen genau umgekehrt: nämlich als die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Differenzengleichung und approximierender Differentialgleichung. Da ihm nur diskrete Meßwerte vorliegen (Bestandsaufnahmen einer Population zur Zeit $t_0, t_1, t_2, \dots$ etwa), muß er sich fragen, ob die Betrachtung einer Differentialgleichung nicht eine unzulässige Idealisierung darstellt. Denkt man an die Quantenphysik, so erscheint ein "gequanteltes" Modell zur Beschreibung eines dynamischen Prozesses in Biologie, Chemie oder Ökonomie (Treppenfunktion anstelle einer stetigen Funktion) nicht anwendungsferner als ein stetiges Modell. Auch makroskopisch kann die Annahme einer unstetigen Kontrollfunktion durchaus realistisch sein (Anhebung oder Senkung einer Kontrollgröße wie Preis oder Zins).

Die mathematischen Ergebnisse (numerisch oder analytisch) bei deterministischen Gleichungen "mit einem Hauch von Phantasie" (/35/) führen (oder haben bereits geführt) zu einer neuen Bewertung experimenteller Ergebnisse. In diesem Zusammenhang finden wir die Aussage eines Chemikers bemerkenswert, der auf die Frage, ob er sich chemische Reaktionen mit chaotischem zeitlichen Ablauf vorstellen könne, antwortete: wenn ein Experimentator bei der Untersuchung einer chemischen Reaktion eine chaotische Versuchsreihe erhalte, würde er diese verwerfen mit der Begründung, das Experiment sei mißlungen (zitiert nach /36/).

Abschließend sei bemerkt, daß Modell-Gleichungen auch einen ersten qualitativen Einblick in andere Typen zeitverzögerter Gleichungen, wie Gleichungen mit mehreren Delays oder Gleichungen mit verteilter Zeitverzögerung gestatten.

LITERATUR
=====

- / 1 / H. AMANN, Lectures on some fixed point theorems, Monografias de matemática, Instituto de matemática pura e aplicada, Rio de Janeiro, 1973
- / 2 / N. ANGELSTORF, Periodische Lösungen einer nichtlinearen und autonomen Funktionaldifferentialgleichung, Diplomarbeit, Bonn 1978
- / 3 / N. ANGELSTORF, Global branching and multiplicity results for periodic solutions of functional differential equations, in /32/, 32-45
- / 4 / O. ARINO, Contribution a l'étude des comportements des solutions d'équations différentielles à retard par des méthodes de monotonie et de bifurcation, Thèse, Université de Bordeaux I, 1980
- / 5 / T.W. CHAUNDY - E. PHILLIPS, The convergence of sequences defined by quadratic recurrence-formulae, Quart.J. Math. 7, 1936, 74-80
- / 6 / S.N. CHOW, Existence of periodic solutions of autonomous functional differential equations, J.Diff.Eq. 15, 1974, 350-378
- / 7 / S.N. CHOW - J. MALLET-PARET, The Fuller index and global Hopf bifurcation, J.Diff.Eq. 29, 1978, 66-85
- / 8 / B.D. COLEMAN - G.H. RENNINGER, Periodic solutions of certain nonlinear integral equations with a time-lag, SIAM J.Appl.Math. 31, 1976, 111-120

- / 9 / P. COLLET - J.P. ECKMANN, Iterated maps on the interval as dynamical systems, Birkhäuser-Verlag, Boston 1980
- /10/ T. FURUMOCHI, Existence of periodic solutions of one-dimensional differential-delay equations, Tôhoku Math.J. 30, 1978, 13-35
- /11/ J. GUCKENHEIMER - G. OSTER - A. IPAKTCHI, The dynamics of density dependent population models, J.Math.Biol. 4, 1977, 101-147
- /12/ K.P. HADELER, Delay equations in biology, in /32/, 136-156
- /13/ J.K. HALE, Theory of functional differential equations, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1977
- /14/ P. HOLMES - J.E. MARSDEN, Qualitative techniques for bifurcation analysis of complex systems, in "Bifurcation theory and applications in scientific disciplines", O. GUREL - O.E. RÖSSLER (eds.), Ann. New York Ac. Sc. 316, 1979, 608-622
- /15/ F.C. HOPPENSTEADT - J.M. HYMAN, Periodic solutions of a logistic difference equation, SIAM J.Appl.Math. 32, 1977, 73-81
- /16/ G.S. JONES, The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)(1+f(x))$, J.Math.Anal.Appl. 5, 1962, 435-450
- /17/ D.W. JORDAN - P. SMITH, Nonlinear ordinary differential equations, Clarendon Press, Oxford 1977
- /18/ H. JÜRGENS - H.-O. PEITGEN - D.SAUPE, Topological perturbations in the numerical study of nonlinear eigenvalue- and bifurcation problems, in: "Analysis and Computation of Fixed Points", S. M. ROBINSON (ed.), Acad. Press, New York 1981

- /19/ J.L. KAPLAN - J.A. YORKE, Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential-delay equations, J.Math.Anal.Appl. 48, 1974, 317-324
- /20/ T.Y. LI - J.A. YORKE, Period three implies chaos, Am. Math.Monthly 82, 1975, 985-992
- /21/ E.N. LORENZ, Deterministic nonperiodic flow, J.Atmos.Sci. 20, 1963, 130-141
- /22/ M.C. MACKEY - L. GLASS, Oscillation and chaos in physiological control systems, Science 197, 1977, 287-289
- /23/ M.D. McLAREN - G. MARSAGLIA, Uniform random number generators, J.Assoc.Comp.Machin. 12, 1965, 83-89
- /24/ F.R. MAROTTO, Snap-back repellers imply chaos in $\mathbb{R}^n$, J.Math.Anal.Appl. 63, 1978, 199-223
- /25/ R.D. NUSSBAUM, Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations, Annali di Mat. pura ed appl. 101, 1974, 263-306
- /26/ R.D. NUSSBAUM, Periodic solutions of special differential-delay equations: an example in nonlinear functional analysis, Proc.Royal Soc. Edinburgh 81A, 1978, 131-151
- /27/ R.D. NUSSBAUM, Uniqueness and nonuniqueness for periodic solutions of $x'(t) = -g(x(t-1))$, J.Diff.Eq. 34, 1979, 25-54
- /28/ R.D. NUSSBAUM, Brief an H.-O. Peitgen, 1977
- /29/ R.D. NUSSBAUM, Periodic solutions of nonlinear autonomous functional differential equations, in / /, 283-325

- /30/ R.D. NUSSBAUM, Asymptotic analysis of functional differential equations and solutions of long period, 1981
- /31/ R.D. NUSSBAUM - H.-O. PEITGEN, Special and spurious periodic solutions of $\dot{x}(t) = -\lambda f(x(t-1))$, 1981
- /32/ H.-O. PEITGEN - H.O. WALTHER (eds.), Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points, Springer Lect. Notes 730, 1979
- /33/ H.-O. PEITGEN - D. SAUPE - K. SCHMITT, Nonlinear elliptic boundary value problems versus their finite difference approximations: numerically irrelevant solutions, J.Reine Angew.Math. 322, 1981, 74-117
- /34/ M. PRÜFER, Simpliciale Topologie und globale Verzweigung, Dissertation, Bonn 1978
- /35/ D. RUELE, Strange attractors, The Math. Intelligencer 1980, 126-137
- /36/ D. SAUPE, Dissertation, Bremen 1981
- /37/ H.W. SIEGBERG, Dissertation, Bremen 1981
- /38/ P. STEFAN, A theorem of Sharkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line, Comm.Math.Phys. 54, 1977, 237-248
- /39/ Y. UEDA, Self-excited oscillations and their bifurcations in systems described by nonlinear differential-difference equations, preprint
- /40/ H.O. WALTHER, On instability, ω -limit sets and periodic solutions of nonlinear autonomous differential delay equations, in /32/, 489-503

